

RENDICONTI  
DELLE SEDUTE  
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE  
DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 15 marzo 1925

R. LANCIANI, Socio anziano, presidente

MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Meccanica analitica.** — *Condizioni atte ad assicurare l'indipendenza degli argomenti nella espressione hamiltoniana dell'azione variata.* Nota del Socio T. LEVI-CIVITA e di U. AMALDI<sup>(1)</sup>.

1. Nel redigere il secondo volume delle nostre « Lezioni di Meccanica razionale » abbiamo avuto occasione di notare, a proposito del principio dell'azione variata, come tutti gli Autori, che potemmo consultare, da JACOBI in poi, si accontentino di affermare che una certa trasformazione di variabili è possibile, almeno in generale, senza accertarne le condizioni di effettiva validità.

Ecco precisamente di che si tratta: dato un sistema lagrangiano

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_b} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_b} = 0 \quad (b = 1, 2, \dots, n)$$

a potenziale cinetico  $\mathcal{L}$  dipendente in modo qualsiasi dai  $2n$  argomenti  $q_b$  e  $\dot{q}_b = \frac{dq_b}{dt}$ , ma non da  $t$ , l'azione

$$(2) \quad \mathcal{A} = \int_{t_0}^t dt \sum_b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_b} \dot{q}_b,$$

(1) Presentata nella seduta del 28 febbraio 1925.

relativa ad una soluzione generica di (1), per un dato intervallo di tempo  $t_0 \rightarrow t$ , si presenta come funzione di  $t - t_0$  e delle costanti di integrazione che individuano codesta soluzione. Come tali si possono naturalmente assumere i valori iniziali  $q_b^0, \dot{q}_b^0$  delle  $q_b, \dot{q}_b$  od anche i  $q_b^0$  e, in luogo dei  $\dot{q}_b^0$ , i valori iniziali  $p_b^0$  delle  $n$  combinazioni (supposte indipendenti) delle  $q_b$  e  $\dot{q}_b$  (momenti)

$$(3) \quad p_b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_b} \quad (b = 1, 2, \dots, n).$$

La trasformazione, cui dianzi alludemmo, consiste nell'esprimere gli  $n + 1$  argomenti  $p_b^0$  e  $t - t_0$  in termini, oltre che delle coordinate iniziali  $q_b^0$ , delle coordinate finali  $q_b$  e della energia totale  $E$ , che è poi il valore costante, e perciò in particolare iniziale, della funzione caratteristica di HAMILTON

$$(4) \quad H = \sum_b p_b \dot{q}_b - \mathcal{L}.$$

In quanto una tale trasformazione sia lecita, l'espressione hamiltoniana dell'azione variata

$$\delta \mathcal{A} = \sum_b (p_b \delta q_b - p_b^0 \delta q_b^0) + (t - t_0) \delta E$$

si può considerare come il differenziale totale di  $\mathcal{A}$  rispetto ai  $2n + 1$  argomenti  $q_b, q_b^0$  ed  $E$ ; e se ne traggono le identità

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q_b} = p_b \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q_b^0} = -p_b^0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial E} = t - t_0,$$

colle classiche conseguenze, dedottene per la prima volta da HAMILTON<sup>(1)</sup>.

Noi ci proponiamo qui di indicare in qual modo abbiamo trattato l'argomento nelle nostre « Lezioni », stabilendo le condizioni di effettiva validità pel cambiamento di variabili testé accennato.

L'analogia questione che si presenta in ordine al principio di HAMILTON e che concerne (anche nel caso di  $\mathcal{L}$  dipendente esplicitamente da  $t$ ) la esprimibilità dell'integrale

$$\mathfrak{S} = \int_{t_0}^t \mathcal{L} dt$$

(1) Cfr. p. es. KELVIN and TAIT, *Treatise on natural philosophy*, Cambridge, University Press (ediz. stereotipa), § 330; J. E. ROUTH, *Treatise on the dynamics*, ecc. (advanced part), 5<sup>a</sup> ed., London, Macmillan, 1892, Cap. X; oppure H. LAMB, *Higher Mechanics*, Cambridge, University Press, 1920, p. 262.

per mezzo degli argomenti iniziali e finali  $t_0, q_b^0$  e  $t, q_b$ , si trova invece considerata e discussa nelle *Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem* di v. WEBER<sup>(1)</sup> col risultato che ad assicurare la sostituibilità delle  $q_b$  alle  $p_b^0$  basta che il sistema lagrangiano (1) sia *normale* (cioè risolubile rispetto alle  $n$  derivate seconde delle  $q_b$ ), il che a sua volta è certo se non si annulla, nell'intorno dei valori iniziali, l'Hessiano della funzione lagrangiana  $\mathcal{L}$  rispetto alle  $\dot{q}_b$ .

$$\Delta = \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_b \partial \dot{q}_k} \right\| \quad (b, k = 1, 2, \dots, n).$$

2. Per la nostra discussione riprendiamo il generico sistema lagrangiano (1) con  $\mathcal{L}$  indipendente da  $t$  e introduciamo senz'altro la ipotesi della normalità, cioè la disuguaglianza

a)  $\Delta \neq 0.$

Con ciò si ha notoriamente equivalenza completa fra il sistema del 2º ordine (1) e il sistema hamiltoniano

$$(5) \quad \dot{p}_b = -\frac{\partial H}{\partial q_b}, \quad \dot{q}_b = \frac{\partial H}{\partial p_b} \quad (b = 1, 2, \dots, n),$$

dove la funzione caratteristica è definita dalla (4), con l'intesa che le  $\dot{q}_b$  vi siano espresse in termini delle  $q_b$  e delle  $p_b$  per mezzo delle (3), le quali, in virtù della ipotesi a), sono certamente risolubili rispetto alle  $\dot{q}_b$ .

Le nostre equazioni differenziali, sia sotto l'originaria forma (1), sia sotto la forma (5), ammettono l'integrale

(6)  $H = \text{cost} = E.$

Immaginiamo di attribuire alla costante  $E$  un valore determinato e associamo la (6) così particolarizzata alle equazioni differenziali sotto la forma lagrangiana (1). Il sistema differenziale così ottenuto definisce, nello spazio astratto ad  $n$  dimensioni delle  $q_b$ ,  $\infty^{2n-2}$  curve, che costituiscono, come si suol dire, un *fascio di traiettorie* del sistema lagrangiano. A giustificare un tal computo e una tale denominazione, osserviamo che, se la  $H$ , considerata, in base alla (4), come funzione delle  $q_b, \dot{q}_b = \frac{d\dot{q}_b}{dt}$ , contiene effettivamente, traverso le  $\dot{q}_b$ , il  $dt$  (e vedremo fra un momento la condizione a ciò sufficiente), la (6) permette di eliminare lo stesso  $dt$  dalle (1),

(1) Leipzig, Teubner, 1900; nn. 380-382. Anche questo complemento figura nelle nostre *Lezioni*, svolto per altro in forma più rapida.

le quali assumono così un aspetto esclusivamente geometrico, in quanto risultano del tutto indipendenti dal tempo  $t$ ; e definiscono nello spazio delle  $q_b$  un insieme di  $\infty^{2n-2}$  curve, traiettorie di tutte e sole quelle soluzioni di (1), che corrispondono al prefissato valore dell'energia  $E$ .

Ma perchè la  $H$  contenga effettivamente, pel tramite delle  $\dot{q}_b$ , il  $dt$  è necessario e sufficiente che la sua derivata rispetto a questo differenziale  $dt$  sia diversa da zero; e poichè questa derivata, a meno del fattore  $-\frac{1}{dt}$ , è data da

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i,$$

si conclude che la condizione voluta si può enunciare dicendo che *la  $H$ , come funzione delle  $q_b$ ,  $\dot{q}_b$ , non deve essere omogenea di grado zero nelle  $\dot{q}_b$* .

A questa condizione giova dare una forma diversa, risalendo dalla  $H$  alla funzione lagrangiana  $\mathcal{L}$ , che va considerata come il dato diretto della questione. In base alle (3) e (4), per caratterizzare sulla  $\mathcal{L}$  anzichè sulla  $H$  il caso di eccezione, bisogna trovare, sotto la ipotesi che  $H$  sia omogenea di grado zero nelle  $\dot{q}_b$ , la più generale espressione di  $\mathcal{L}(q|\dot{q})$  che soddisfa all'equazione

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = H,$$

lineare, ma non omogenea, rispetto ad  $\mathcal{L}$  e alle sue derivate. Ora, per una notissima regola di Calcolo, la più generale soluzione di una tale equazione si ottiene aggiungendo ad una qualsiasi soluzione particolare l'integrale generale dell'equazione priva di secondo membro, che, riducendosi qui a

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = 0,$$

caratterizza tutte e sole le funzioni omogenee di 1° grado nelle  $\dot{q}_b$ . Se allora si osserva che, essendo la  $H$ , per ipotesi, omogenea di grado zero nelle  $\dot{q}_b$ , la  $\mathcal{L} = -H$  è una particolare soluzione della (7), e che, d'altra parte la  $H$  non è sottoposta ad alcuna condizione, all'infuori di quella della omogeneità di grado zero nelle  $\dot{q}_b$ , si conclude che: *Perchè la (7) contenga effettivamente il  $dt$  occorre e basta che*

*b) la funzione lagrangiana  $\mathcal{L}(q|\dot{q})$  non sia decomponibile nella somma di due funzioni omogenee nelle  $\dot{q}_b$ , dei gradi zero ed uno rispettivamente.*

3. A questo punto della discussione giova riferirsi, anzichè al sistema lagrangiano (1), al suo equivalente hamiltoniano (5), e calcolare pel suo integrale generale i primi termini degli sviluppi delle funzioni incognite  $q_b$  in serie di potenze dell'argomento  $t - t_0$ , a partire dai valori iniziali  $p_b^0, q_b^0$ .

In base alla seconda  $n^{pla}$  di equazioni (5) si ha immediatamente

$$(8) \quad q_b - q_b^o = -(t - t_o) \frac{\partial H(p^o | q^o)}{\partial p_b^o} + (2) \quad (b = 1, 2, \dots, n)$$

dove con la consueta notazione (n) si designano termini che contengono a fattore il binomio  $t - t_o$  almeno all'esponente  $n$ ; e tutto si riduce a riconoscere sotto quali condizioni il sistema di  $n+1$  equazioni, che si ottiene, associando a queste equazioni integrali (8), la (6), riferita addirittura all'istante iniziale  $t_o$ , risulti risolubile rispetto agli  $n+1$  argomenti  $p_b^o$  e  $t - t_o$ . Assodata questa risolubilità, avremo, insieme, dimostrato che rimangono effettivamente indipendenti gli altri  $2n+1$  argomenti  $q_b, q_b^o$  ed  $E$ , che compaiono nelle suindicate equazioni.

Tutto ciò sarà provato, se ci assicureremo che, per  $t$  diverso da  $t_o$  e abbastanza vicino ad esso, non si annulli il determinante funzionale, rispetto alle  $p_b^o$  e  $t - t_o$ , dei primi membri delle equazioni (8) e (6) che qui riscriviamo:

$$(8') \quad (t - t_o) \frac{\partial H(p^o | q^o)}{\partial p_b^o} + q_b - q_b^o + (2) = 0 \quad (b = 1, 2, \dots, n)$$

$$(6') \quad H(p^o | q^o) - E = 0.$$

Gli elementi  $c_{hk}$  di questo determinante funzionale per le prime  $n$  righe e colonne ( $h, k = 1, 2, \dots, n$ ) sono dati, in base alle (8'), da

$$c_{h,k} = (t - t_o) \frac{\partial^2 H}{\partial p_h^o \partial p_k^o} + (2) \quad (h, k = 1, 2, \dots, n);$$

mentre per l'ultima colonna si ha, ancora dalle (8'),

$$c_{h,n+1} = \frac{\partial H}{\partial p_h^o} + (1) \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

e per l'ultima riga, dalla (6'),

$$c_{n+1,k} = \frac{\partial H}{\partial p_k^o} \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad c_{n+1,n+1} = 0.$$

Pel nostro scopo basta valutare del determinante

$$\| c_{h,k} \| \quad (h, k = 1, 2, \dots, n+1)$$

i termini di grado minimo rispetto al binomio  $t - t_o$ ; cosicchè intanto appare manifesto che per gli elementi dell'ultima colonna è inutile tener conto

dei secondi addendi (1), giacchè essi darebbero luogo a termini di ordine superiore a quelli provenienti complessivamente dai primi addendi. Resta così un determinante orlato che, notoriamente, si riduce ad una forma quadratica negli elementi  $\frac{\partial H}{\partial p_k}$  degli orli, avente per coefficienti i complementi algebrici degli elementi del determinante non orlato

$$\| c_{b,k} \| \quad (b, k = 1, 2, \dots, n);$$

e qui ancora è evidente che in ciascuno di codesti complementi algebrici il termine di ordine minimo si ha trascurando nei  $c_{b,k}$  i secondi addendi (2). In ultima analisi, ove si introduca anche l'Hessiano della funzione hamiltoniana  $H$  rispetto alle  $p_b$ , cioè

$$\Delta_1 = \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_b \partial p_k} \right\| \quad (b, k = 1, 2, \dots, n),$$

e per brevità si ponga

$$\Omega = \begin{vmatrix} & & & \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ & & & \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ & & \vdots & \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \Delta_1 & & & \\ \hline \frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{\partial H}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial H}{\partial p_n} & 0 \end{vmatrix}$$

si riconosce che la parte principale del determinante in questione si riduce a

$$(t - t_0)^n - \Omega^\circ,$$

dove l'apice  $\circ$  sta a denotare che alle  $p_b, q_b$  vanno sostituiti i loro valori iniziali, e si conclude che la condizione cercata di risolubilità si è che, pei valori iniziali che si vogliono considerare, si abbia

$$\Omega \neq 0.$$

4. Oramai ci resta unicamente da riportare alla funzione lagrangiana  $\mathcal{L}$  anche quest'ultima condizione, che abbiamo ottenuto in forma per così dire hamiltoniana, in quanto vi compariscono le derivate della  $H$ .

A tale scopo osserviamo anzitutto che, in base alla seconda ennupla delle equazioni (5), gli elementi  $\frac{\partial H}{\partial p_b}$ , che figurano negli orli di  $\Omega$ , sono senza altro sostituibili colle  $\dot{q}_b$ .

D'altra parte, come si sa dai primi elementi della teoria della trasformazione hamiltoniana, i due sistemi di equazioni

$$p_b = \frac{\partial \mathcal{L}(q | \dot{q})}{\partial \dot{q}_b} , \quad \dot{q}_b = \frac{\partial H(p | q)}{\partial p_b} \quad (b = 1, 2, \dots, n) ,$$

sono l'uno l'inverso dell'altro, talchè le derivate parziali

$$\frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_b \partial \dot{q}_k} , \quad \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial p_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_b \partial p_k} \quad (b, k = 1, 2, \dots, n) ,$$

costituiscono due sistemi reciproci nel senso della teoria dei determinanti. Segue di qui in primo luogo che, fra i due Hessiani  $\Delta$  e  $\Delta_1$  di  $\mathcal{L}$  ed  $H$  rispettivamente, intercede l'identità

$$\Delta \Delta_1 = 1 .$$

Inoltre i complementi algebrici degli elementi di  $\Delta_1$ , vale a dire i coefficienti della forma quadratica nelle  $\frac{\partial H}{\partial p_b} = \dot{q}_b$ , che dà lo sviluppo del determinato orlato  $\Omega$ , si ottengono moltiplicando per  $\Delta_1 = \frac{1}{\Delta}$  i corrispondenti elementi di  $\Delta$ , cioè le  $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_b \partial \dot{q}_k}$ ; cosicchè si ha

$$\Omega = \frac{1}{\Delta} \sum_{b, k}^n \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_b \partial \dot{q}_k} \dot{q}_b \dot{q}_k ;$$

e per la voluta risolubilità del sistema (8'), (6') rispetto alle  $p_b^o$  e  $t - t_o$  basta introdurre accanto alle già ammesse limitazioni a) e b), la condizione che per valori iniziali che si considerano si abbia

$$c) \quad \sum_{b, k}^n \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_b \partial \dot{q}_k} \dot{q}_b \dot{q}_k \neq 0 .$$

Naturalmente, se, pur limitandosi alla analisi locale, in un conveniente intorno di una posizione iniziale  $q_b^o$  generica, si vogliono contemplare tutte le traiettorie che partono da essa, in qualsiasi direzione, bisogna accertarsi che la c) sussista (in corrispondenza ai dati valori delle  $q_b^o$ ) comunque si scelgano le  $\dot{q}_b^o$ .

In conclusione, ad assicurare la completa validità dei classici risultati dell'HAMILTON circa l'azione variata bastano le tre condizioni a), b), c), tutte e tre immediatamente verificabili sulla data funzione lagrangiana  $\mathfrak{L}$ .

Termineremo osservando che nel caso dinamico (in senso ristretto), in cui  $\mathfrak{L}$  è del tipo

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_0,$$

dove  $\mathfrak{L}_2$  ed  $\mathfrak{L}_1$  denotano due forme nelle  $\dot{q}_b$ , rispettivamente di grado due ed uno, mentre  $\mathfrak{L}_0$  dipende dalle sole  $q$ , le condizioni a), b), c) sono certamente soddisfatte grazie alla circostanza che la forma  $\mathfrak{L}_2$  è per sua natura definita positiva.

### **Matematica. — Sull'unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria.** Nota del Socio Corrisp. LEONIDA TONELLI<sup>(1)</sup>.

La lettura della Nota del prof. Bompiani, su un teorema di confronto per le equazioni differenziali ordinarie<sup>(2)</sup>, mi ha fatto ripensare ad alcune mie vecchie ricerche sulle equazioni differenziali, che, interrotte nel 1915 al sopraggiungere della guerra, non furono più riprese. Mi riprometto, non appena i miei attuali studi me lo consentiranno, di ritornare a quelle ricerche; ma, intanto, voglio da esse stralciare un'osservazione relativa all'unicità della soluzione, la quale mi sembra che allarghi notevolmente le condizioni ben note per tale unicità. Dopo di ciò, mostrerò come, seguendo una via diversa da quella del Bompiani, si giunge al suo teorema sotto condizioni ben più generali di quelle da lui poste.

I. - È nota la condizione di Lipschitz circa l'unicità della soluzione, dell'equazione differenziale ordinaria:

$$(1) \quad y' = f(x, y),$$

passante per un dato punto  $P_0$  del campo in cui è definita la  $f(x, y)$ . A tale condizione, F. W. Osgood<sup>(3)</sup> ha sostituito la seguente, più generale: « Sia  $\omega(u)$  una funzione continua, tale che:  $\omega(0) = 0$ ;  $\omega(u) > 0$  per  $u > 0$ ;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{du}{\omega(u)} = +\infty.$$

(1) Presentata nella seduta del 28 febbraio 1925.

(2) Vedi questo stesso fascicolo, p. 298.

(3) *Monatshefte für Math. u. Phys.*, 1898, p. 331. Questa proposizione è stata recentemente ritrovata da J. Tamarkine (« Math. Zeitschrift », 168, 1923, p. 206), il quale pone, in più, la condizione, inutilmente ristrettiva, che la  $\omega(u)$  sia crescente.

Se, nel rettangolo  $R \{ |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \}$ , la funzione reale e continua  $f(x, y)$  soddisfa alla:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \omega(|y_2 - y_1|),$$

allora esiste, in  $R$ , una sola curva integrale della (1) passante per il punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ .

Fissiamo la nostra attenzione sulle soluzioni della (1) *uscenti* da  $P_0$  e giacenti in  $R$ , tali cioè che per esse sia sempre  $x_0 \leq x \leq x_0 + a, y(x_0) = y_0$ . Se, per ogni  $x > x_0$  e  $\leq x_0 + a$ , la  $f(x, y)$  è funzione non crescente di  $y$ , si dimostra subito, indipendentemente dalla condizione di Osgood, che può esistere, in  $R$ , una sola soluzione della (1), *uscente* da  $P_0$ . [Ed infatti, se da  $P_0$  ne uscissero due,  $y_1$  e  $y_2$ , e fosse, in un  $\bar{x} > x_0, y_2(\bar{x}) > y_1(\bar{x})$ , si avrebbe, per la (1) e per la proprietà ammessa per la  $f, y'_2(\bar{x}) - y'_1(\bar{x}) \leq 0$ , e la differenza  $y_2 - y_1$  risulterebbe funzione non crescente in  $x$  ed anche in tutti i punti in cui è  $y_2 > y_1$ ; e detto  $x_1$  il massimo punto di  $(x_0, \bar{x})$  in cui è  $y_2 = y_1$ , si avrebbe, da una parte,  $y_2(x_1) = y_1(x_1)$ , e dall'altra,  $y_2(x_1) - y_1(x_1) \geq y_2(\bar{x}) - y_1(\bar{x}) > 0$ ]. Ora questa condizione di unicità, pur essendo tanto semplice, non è contenuta né in quella di Lipschitz, né in quella di Osgood. Vien fatto, pertanto, di chiedersi se può enunciarsi una condizione più generale di quella di Osgood, la quale comprenda anche quella ora indicata. A ciò risponde la proposizione che ora dimostreremo.

2. — «Sia  $\omega(u)$  una funzione continua,  $> 0$  per ogni  $u > 0$ , tale che, supposto  $u_0 > \varepsilon > 0$ , risulti:

$$(2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)} = +\infty.$$

Sia, inoltre,  $\varphi(x)$  una funzione reale, data in  $(x_0, x_0 + a)$  e tale che il suo integrale (anche secondo Lebesgue)

$$(3) \quad \int_{x_1}^{x_0+a} \varphi(x) dx$$

esista finito, se  $x_0 < x_1 < x_0 + a$ , ed abbia un limite finito per  $x_1 \rightarrow x_0 + a$ . Allora, se, per ciascuno degli  $x_1$  indicati, nel rettangolo  $x_1 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b$ , la funzione reale  $f(x, y)$  resta in modulo limitata<sup>(1)</sup>, e se è sempre:

$$(4) \quad f(x, y_2) - f(x, y_1) \leq \varphi(x) \omega(y_2 - y_1),$$

(1) Questa condizione è certamente soddisfatta se la  $f(x, y)$  è continua o anche soltanto limitata, in tutto  $R$ . Essa si può poi sostituire con l'altra, più generale, che ogni soluzione di (1), uscente da  $P_0$ , risulti, per  $x > x_0$ , assolutamente continua.

quando sia  $x_0 < x \leq x_0 + a$ ,  $-b \leq y_1 < y_2 \leq b$ , non può esistere, in  $R$ , che una sola soluzione della (1), uscente da  $P_0$  » (1).

Supponiamo che esistano, in  $R$ , due soluzioni  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$ , uscenti da  $P_0$ . Allora, per almeno un  $x'$ , tale che  $x_0 < x' \leq x_0 + a$ , è  $y_1(x') = y_2(x')$ . Sia, per fissare le idee,  $y_1(x') < y_2(x')$ , e, posto  $u = y_2 - y_1$ , indichiamo con  $x'_0$  il massimo  $x$  di  $(x_0, x')$  in cui è  $u(x'_0) = 0$ . Sarà sicuramente  $u(x) > 0$ , se  $x'_0 < x \leq x'$ . Per ogni  $x$  di  $(x'_0, x')$ , avremo poi, giacchè  $y_1$  e  $y_2$  sono soluzioni della (1),  $u' = y'_2 - y'_1 = f(x, y_2) - f(x, y_1)$ , onde, per la (4), se  $x > x'_0$ ,  $u'(x) \leq \varphi(x) \omega(u)$ . Di qui segue, supposto  $x'_0 < x_1 < x'$ ,

$$\int_{x_1}^{x'} \frac{u' dx}{\omega(u)} \leq \int_{x_1}^{x'} \varphi dx.$$

Essendo  $|u'(x)| \leq |f(x, y_2)| + |f(x, y_1)|$ ,  $|u'(x)|$  resta, per le ipotesi fatte sulla  $f(x, y)$ , minore di un numero fisso, in tutto  $(x_1, x')$ , e la  $u(x)$  è ivi assolutamente continua. Per un noto teorema di integrazione per sostituzione, abbiamo dunque:

$$\int_{u(x_1)}^{u(x')} \frac{du}{\omega(u)} \leq \int_{x_1}^{x'} \varphi dx.$$

Per  $x_1 \rightarrow x'_0 + 0$ , è  $u(x_1) \rightarrow u(x'_0) = 0$ , e, in virtù di (2), il primo membro della disegualanza scritta tende a  $+\infty$ . Altrettanto deve allora avvenire per il 2° membro, ciò che contraddice all'ipotesi fatta sull'integrale (3).

3. — Vale evidentemente un teorema analogo al precedente e relativo alle soluzioni di (1), contenute in  $R$  e, giungenti in  $P_0$  (cioè tali che per esse sia sempre  $x_0 - a \leq x \leq x_0$ , con  $y(x_0) = y_0$ ). In esso, l'intervallo  $(x_0, x_0 + a)$  dovrà sostituirsi con  $(x_0 - a, x_0)$ , e la disegualanza (4) con la:

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \geq \varphi(x) \omega(y_2 - y_1).$$

4. — Dimostriamo ora il seguente teorema:

«Se  $\varphi(x, u)$  è una funzione reale, continua, definita nel campo

$$x_0 \leq x \leq x_0 + a, |u| \leq b;$$

se la funzione reale  $f(x, y)$ , data in  $R$ , verifica la disegualanza

$$(5) \quad f(x, y_2) - f(x, y_1) \leq \varphi(x, y_2 - y_1),$$

(1) Se, per es., si ha l'equazione  $y' = \frac{y}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \operatorname{sen}^3 y$ , il teorema si può applicare al punto  $P_0 \equiv (0, 0)$ , per  $\omega(u) \equiv u$  e  $\varphi(x) \equiv \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ , con  $a = b = 1$ .

per ogni  $x$  di  $(x_0, x_0 + a)$  ed ogni coppia  $y_1, y_2$ , tale che  $-b \leq y_1 \leq y_2 \leq b$ ; indicato con  $u_o(x)$  il massimo integrale, uscente dal punto  $(x_0, 0)$ , dell'equazione differenziale

$$(6) \quad u' = \varphi(x, u),$$

e supposto  $|u_o(x)| < b$  in tutto  $(x_0, x_0 + a)$ , la differenza fra due soluzioni della (1), giacenti in  $R$  e uscenti da  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ , resta, in modulo, sempre minore o uguale a  $u_o(x)$  » (1).

a) Consideriamo due soluzioni  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  della (1) giacenti in  $R$  e uscenti da  $P_0$ , e indichiamo con  $\bar{y}_1(x)$  e  $\bar{y}_2(x)$  due funzioni uguali, per ogni  $x$  di  $(x_0, x_0 + a)$ , rispettivamente al minore e al maggiore dei due numeri  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$ . Poichè, per la (1), in ogni  $x$  per cui è  $y_1(x) = y_2(x)$  è anche  $y'_1(x) = y'_2(x)$ , le  $\bar{y}_1(x)$  e  $\bar{y}_2(x)$  sono anch'esse due soluzioni della (1), giacenti in  $R$  e uscenti da  $P_0$ . Di più, è sempre  $\bar{y}_1(x) \leq \bar{y}_2(x)$ , vale a dire, posto

$$v(x) = \bar{y}_2(x) - \bar{y}_1(x),$$

è sempre, in  $(x_0, x_0 + a)$ ,  $v(x) \geq 0$ , con  $v(x_0) = 0$ . E siccome è sempre  $v(x) = |y_2(x) - y_1(x)|$ , la nostra proposizione sarà dimostrata se proveremo che è, in tutto  $(x_0, x_0 + a)$ ,  $v(x) \leq u_o(x)$ .

Siccome è  $v(x_0) = 0$  e  $u_o(x_0) = 0$ , è pure  $v(x_0) = u_o(x_0)$ . Indichiamo allora con  $x'_0$  il massimo  $x$  di  $(x_0, x_0 + a)$  tale che, in tutto  $(x_0, x'_0)$ , sia sempre  $v(x) \leq u_o(x)$ . Occorre provare che è  $x'_0 = x_0 + a$ .

b) Per dimostrare ciò, supponiamo, in primo luogo, che nella (5) non valga mai il segno  $=$ , vale a dire, che, invece della (5), sia

$$(5') \quad f(x, y_2) - f(x, y_1) < \varphi(x, y_2 - y_1).$$

Ammesso — se è possibile — che sia  $x'_0 < x_0 + a$ , ne risulta  $v(x'_0) = u_o(x'_0)$ . Indicato con  $b$  un numero soddisfacente alle disugualanze  $0 < b < \{b - u_o(x'_0)\}/2$ , determiniamo un  $\sigma$  positivo, minore di  $x_0 + a - x'_0$  e tale che il massimo integrale  $u_b(x)$ , della (6), uscente dal punto  $(x'_0, u_o(x'_0) + b)$ , verifichi, per ogni  $x$  di  $(x'_0, x'_0 + \sigma)$  e per tutti gli  $b$  indicati, la  $|u_b(x)| < b$  (2).

Posto

$$\delta_b(x) = u_b(x) - v(x),$$

(1) Il teorema della Nota citata del Bompiani si ottiene da quello ora enunciato supponendo, in più, che sia sempre  $\varphi(x, u) \geq 0$ , che la  $\varphi(x, u)$ , come funzione della  $u$ , sia non decrescente, e che, insieme con la (5), valga anche l'altra diseguaglianza  $f(x, y_2) - f(x, y_1) \geq -\varphi(x, y_2 - y_1)$ . Lo stesso dicasi per il teorema che daremo più oltre, al n. 6.

(2) Basta scegliere  $\sigma > 0$  e minore di  $x_0 + a - x'_0$  e di  $\{b - u_o(x'_0)\}/2$ , essendo  $M$  il massimo modulo di  $\varphi(x, u)$ .

è  $\delta_b(x'_o) = b > 0$ ,  $\delta'_b(x) = u'_b(x) - v'(x) = \varphi(x, u_b) - \{f(x, \bar{y}_2) - f(x, \bar{y}_1)\}$ , e, per la (5'),

$$(7) \quad \delta'_b(x) > \varphi(x, u_b) - \varphi(x, v).$$

Sia ora  $x_b$  il massimo  $x$  di  $(x'_o, x'_o + \sigma)$ , tale che, in tutto  $(x'_o, x_b)$ , sia sempre  $\delta_b(x) \geq 0$ .

Se fosse  $x_b < x'_o + \sigma$ , sarebbe necessariamente  $\delta_b(x_b) = 0$ , e quindi, per ogni  $x$  di  $(x'_o, x_b)$ ,  $\delta_b(x) - \delta_b(x_b) = \delta_b(x) \geq 0$ , donde  $\delta'_b(x_b) \leq 0$ . Ma dalla  $\delta_b(x_b) = 0$ , ossia dalla  $u_b(x_b) = v(x_b)$ , seguirebbe, in virtù della (7),  $\delta'_b(x_b) > 0$ , e questa contraddizione prova che deve essere  $x_b = x'_o + \sigma$ .

Facciamo tendere  $b$  allo zero. Avremo sempre, in  $(x'_o, x'_o + \sigma)$ ,  $\delta_b(x) \geq 0$ , ossia  $v(x) \leq u_b(x)$ .

Ma, per  $b \rightarrow +0$ , è  $u_b(x) \rightarrow u_o(x)$ <sup>(1)</sup>, onde, in tutto  $(x'_o, x'_o + \sigma)$ , è sempre  $v(x) \leq u_o(x)$ , ciò che contraddice alla definizione del punto  $x'_o$ . È dunque effettivamente  $x'_o = x_o + a$ , vale a dire, è, in tutto  $(x_o, x_o + a)$ ,  $v(x) \leq u_o(x)$ .

c) Liberiamoci ora completamente dall'ipotesi supplementare (5'). Ammettiamo ancora che sia  $x'_o < x_o + a$ , donde  $v(x'_o) = u_o(x'_o)$ , e posto:

$$\varphi_b(x, u) = \varphi(x, u) + k,$$

consideriamo l'equazione differenziale:

$$(6') \quad u' = \varphi_b(x, u),$$

per ogni  $k$  tale che  $0 < k < 1$ . Determiniamo poi un  $\sigma$ , positivo e minore di  $x_o + a - x'_o$ , in modo che, per ciascuno dei valori di  $k$  indicati, il massimo integrale  $u(x, k)$  della (6'), uscente dal punto  $[x'_o, u_o(x'_o)]$ , verifichi la  $|u(x, k)| < b$ , in tutto  $(x'_o, x'_o + \sigma)$ <sup>(2)</sup>.

Dalla (5) segue che, contemporaneamente ad essa, vale, nelle stesse condizioni, anche la:

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) < \varphi_b(x, y_2 - y_1),$$

che è analoga alla (5'). Pertanto, essendo  $v(x'_o) = u(x'_o) = u(x'_o, k)$ , il ragionamento fatto in b), quando in esso si sostituisca  $u_o(x)$  con  $u(x, k)$ ,

(1) Cfr. P. MONTEL, *Sur les suites infinies de fonctions*. «Annales de l'Éc. Norm. Sup.», 1907, n. 27. Avvertiamo però che, mentre la parte del ragionamento del Montel che serve al caso nostro è completamente valida, il teorema enunciato alla fine del numero indicato non è esatto.

(2) Basta scegliere  $\sigma > 0$  e minore di  $x_o + a - x'_o$  e di  $\{b - u_o(x'_o)\} : 2(M+1)$ .

e  $\varphi(x, u)$  con  $\varphi_k(x, u)$ , prova che, in tutto l'intervallo  $(x'_o, x'_o + \sigma)$  è sempre  $v(x) \leq u(x, k)$ . Ma, per ogni  $\epsilon > 0$ , si può determinare un  $\bar{k}$  in modo che, per ogni  $k < \bar{k}$ , sia, in tutto  $(x'_o, x'_o + \sigma)$ ,  $u(x, k) < u_o(x) + \epsilon^{(1)}$ ; è dunque  $v(x) < u_o(x) + \epsilon$  e quindi  $v(x) \leq u_o(x)$ , in tutto  $(x'_o, x'_o + \sigma)$ . Ciò contraddice alla definizione di  $x'_o$ , e risulta così  $x'_o = x_o + a$ , e  $v(x) \leq u_o(x)$ , in tutto  $(x_o, x_o + a)$ .

5. - Nel caso particolare in cui la  $\varphi(x, u)$  sia, rispetto alla  $u$ , funzione sempre non decrescente o sempre non crescente, la dimostrazione del n° preced. può semplificarsi notevolmente. Ed infatti, avendosi  $\delta_b(x'_o) = b > 0$ ,  $\delta'_b(x) \geq \varphi(x, u_b) - \varphi(x, v)$ , se la  $\varphi(x, u)$  è sempre non decrescente, rispetto ad  $u$ , è  $\delta'_b(x'_o) \geq 0$ , ed anche  $\delta'_b(x) \geq 0$ , finchè è  $\delta_b(x) \geq 0$ ; vale a dire, a partire da  $x'_o$  è sempre  $\delta_b(x) \geq b$ , perchè, se  $x'$  fosse il primo punto, che segue  $x'_o$ , tale che  $\delta_b(x') = b'$ , con  $0 < b' < b$ , dovrebbe essere, in qualche punto di  $(x'_o, x')$ ,  $\delta'_b(x) < 0$ , ciò che non può avvenire essendo, in tutto  $(x'_o, x')$ ,  $\delta_b(x) \geq b' > 0$  e quindi  $\delta'_b(x) \geq 0$ .

Se poi la  $\varphi(x, u)$  è sempre non crescente, risulta  $\delta_b(x) \geq 0$  in tutto  $(x'_o, x'_o + \sigma)$ , perchè detto, nel caso contrario,  $x_i$  un punto in cui è  $\delta_b(x_i) < 0$ , sarebbe  $\delta'_b(x_i) \geq 0$ , ed anche  $\delta'_b(x) \geq 0$  in ogni intervallo  $(x'_i, x_i)$  in cui sia sempre  $\delta_b(x) \leq 0$ , vale a dire sarebbe, in tutto  $(x'_o, x_i)$ ,  $\delta_b(x) \leq \delta_b(x_i) < 0$ , contro la  $\delta_b(x'_o) = b > 0$ .

Dunque, in ambedue i casi qui considerati, è, in tutto  $(x'_o, x'_o + \sigma)$ ,  $\delta_b(x) = u_b(x) - v(x) \geq 0$ , e perciò anche  $u_o(x) - v(x) \geq 0$ , la quale diseguaglianza risulta così provata in tutto  $(x_o, x_o + a)$ , indipendentemente dalla (5).

6. - Dalla proposizione dimostrata nel n. 4 discende subito che, se, in più delle ipotesi là poste, si suppone  $\varphi(x, 0) = 0$  in tutto  $(x_o, x_o + a)$ , e se il massimo integrale  $u_o(x)$ , della (6), è dato da  $u_o(x) = 0$ , esiste al più un solo integrale della (1) giacente in  $R$  e uscente da  $P_o$ .

7. - Valgono evidentemente teoremi analoghi a quelli dei nn. 4 e 6, relativamente alle soluzioni della (1) giacenti in  $R$  e giungenti in  $P_o$ . In essi la diseguaglianza (5) dovrà essere sostituita con la:

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \geq \varphi(x, y_2 - y_1),$$

intendendo che la  $x$  sia ora considerata nell'intervallo  $(x_o - a, x_o)$ .

(1) Si osservi che, essendo sempre  $|\varphi_k(x, u)| < M + 1$ , è pure  $|u'(x, k)| < M + 1$ , e le  $u(x, k)$  sono ugualmente continue in  $(x'_o, x'_o + \sigma)$ . Inoltre, ogni funzione limite della  $u(x, k)$ , per  $k \rightarrow 0$ , è un integrale della (6).

**Chimica.** — *Solfati di lantano e tallio talloso.* Nota del Socio F. ZAMBONINI e del dott. G. CAROBBI<sup>(1)</sup>.

Continuando le nostre ricerche sistematiche sui solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini, delle quali abbiamo già cominciato a dar notizia alcuni mesi or sono<sup>(2)</sup>, abbiamo intrapreso lo studio di quei solfati doppi, nei quali il solfato alcalino è rimpiazzato dal solfato talloso, che, come è ben noto, è isomorfo con i solfati di potassio, di rubidio e di cesio.

Di solfati doppi dei metalli delle terre rare col solfato talloso non se ne conoscono, almeno per quanto ci è noto, che due descritti dal Wyrouboff<sup>(3)</sup>, rispondenti alle formule :



Recentemente, L. Rolla, V. Cuttica e L. Fernandes<sup>(4)</sup> hanno dimostrato che i solfati doppi dei metalli delle terre ittriche col solfato talloso possono servire assai bene, per una rapida separazione, mediante poche cristallizzazioni frazionate, dell'ittrio dagli altri elementi che lo accompagnano del suo gruppo con peso atomico elevato.

Nella presente Nota riferiremo brevemente sui risultati ottenuti nello studio di quella parte del sistema  $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 - \text{Tl}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$  che particolarmente ci interessa, dato lo scopo del nostro lavoro.

Abbiamo operato esattamente come nei sistemi già descritti : soltanto, si è dovuto modificare il procedimento analitico, data la presenza del tallio al posto del potassio degli altri sistemi. E, precisamente, dalle soluzioni dei corpi di fondo o dalle fasi liquide del sistema si precipitò il lantano con acido ossalico, dopo avere ben stabilito, con appositi saggi, che l'ossalato di lantano, ottenuto in quelle condizioni, non contiene tallio. Quanto a quest'ultimo elemento, lo si precipitò, dopo eliminato il lantano, allo stato di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli. Presentato nella seduta del 28 Febbraio 1925.

(2) ZAMBONINI e CAROBBI, «Rend. R. Acc. Lincei» (5°) 1924, XXXIII, 2° sem. 301. ZAMBONINI e CAGLIOTTI, ibidem 308.

(3) «Bull. Soc. franç. minér.», 1891, XIV, 83.

(4) «Gazzetta Chim. Ital.», 1924, LIV, p. 617.

ioduro talloso. Per tutto il resto, si operò come abbiamo indicato nei precedenti lavori.

Mentre i solfati doppi di lantano e potassio e di neodimio e potassio potevano quasi tutti essere riscaldati fino a fusione senza che avvenisse decomposizione, si è osservato che i solfati di lantano e tallio talloso non possono essere riscaldati al di là di 400° circa. Infatti, innalzando anche di poco la temperatura al disopra del limite indicato, si ha decomposizione e volatilizzazione del tallio.

I risultati ottenuti, come al solito per l'isoterma di 25°, sono riuniti nella seguente

TABELLA I.

Numero dell'esperimento	Composizione della fase liquida				Composizione della fase solida				Costituenti del corpo di fondo
	$\text{La}_2(\text{SO}_4)_3$	$\text{Tl}_2\text{SO}_4$	$\text{H}_2\text{O}$	$\frac{\text{Tl}_2\text{SO}_4}{\text{H}_2\text{O}}$	La	Tl	$\text{H}_2\text{O}$	$\frac{\text{La}_2(\text{SO}_4)_3}{\text{Tl}_2\text{SO}_4}$	
1	—	5.28	94.72	0.056	6.76	69.75	—	0.16	
2	—	5.16	94.84	0.054	8.08	67.46	—	0.20	$1 - 4 \frac{1}{2} + \text{Tl}_2\text{SO}_4$
3	—	5.25	94.75	0.055	9.90	64.79	—	0.25	
4	—	4.07	93.93	0.042	9.91	64.94	—	0.25	
5	—	3.19	96.81	0.033	9.68	64.93	—	0.25	$1 - 4 \frac{1}{2}$
6	0.12	2.37	97.51	0.024	9.58	65.37	—	0.24	
7	0.17	2.05	97.78	0.021	9.81	64.19	—	0.25	
8	0.16	2.01	97.83	0.021	11.87	61.27	—	0.32	$1 - 4 \frac{1}{2} + 1 - 3$
9	0.15	1.89	97.96	0.019	12.93	61.09	—	0.35	
10	0.26	1.82	97.92	0.019	13.74	59.33	—	0.37	$1 - 3$
11	0.25	1.75	98.00	0.018	13.42	58.52	—	0.38	
12	0.27	1.71	98.02	0.017	14.56	57.31	1.38	0.42	
13	0.21	1.72	98.07	0.017	21.40	44.91	3.04	0.79	$1 - 3 + 1 - 1 - 2$
14	0.11	1.75	98.14	0.018	24.89	37.49	3.28	1.09	
15	0.15	1.27	98.58	0.013	25.49	36.50	3.19	1.15	
16	0.19	0.84	98.97	0.009	25.43	36.20	3.18	1.16	$1 - 1 - 2$
17	0.29	0.49	99.22	0.005	25.74	36.93	3.70	1.15	
18	1.19	0.14	98.67	0.001	25.57	36.33	3.90	1.14	
19	1.84	0.19	98.97	0.002	25.09	36.81	5.78	1.13	$1 - 1 - 2 + \text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$

## COMPOSIZIONE TEORICA DEI COMPOSTI OTTENUTI.

	La	Tl	SO <sub>4</sub>	H <sub>2</sub> O
La <sub>2</sub> (SO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> · 4 ½ Tl <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	9.81	64.77	25.42	—
La <sub>2</sub> (SO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> · 3 Tl <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	13.38	58.89	27.73	—
La <sub>2</sub> (SO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> · Tl <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> · 2H <sub>2</sub> O . . . . .	25.13	36.88	34.73	3.26

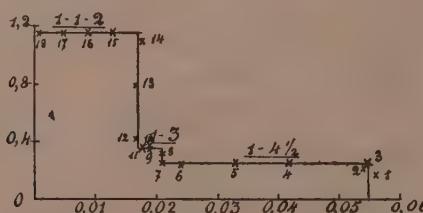


Fig. 1

Nella fig. 1 sono rappresentati, con lo stesso metodo già adoperato negli altri nostri lavori sull'argomento, i risultati della Tabella I: sulle ordinate sono riportati i rapporti  $\frac{\text{La}_2(\text{SO}_4)_3}{\text{Tl}_2\text{SO}_4}$  determinati nei corpi di fondo, e sulle ascisse, invece, quelli  $\frac{\text{Tl}_2\text{SO}_4}{\text{H}_2\text{O}}$  delle fasi liquide. Come si vede, i composti ottenuti sono i seguenti:

La <sub>2</sub> (SO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> · 4 ½ Tl <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	ovvero 1-4 ½
La <sub>2</sub> (SO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> · 3 Tl <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	» 1-3
La <sub>2</sub> (SO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> · Tl <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> · 2H <sub>2</sub> O . . . . .	» 1-1-2.

Nessuno di questi composti era stato finora, almeno per quanto ci consta, descritto. I solfati doppi 1-3 e 1-1 erano stati già preparati dal Wyrouboff, come abbiamo ricordato in principio del presente lavoro, per il cerio ceroso, però con un diverso numero di molecole di acqua di cristallizzazione (1 e 4 invece di 0 e 2).

Il composto 1-4 ½ ha il campo di esistenza più esteso: segue, poi, 1-1-2, mentre un campo limitatissimo ha l'altro sale doppio 1-3. Dei cinque solfati doppi di lantanzio e potassio soltanto due, e, cioè, 1-3 e 1-1-2, si rinvengono anche nel sistema La<sub>2</sub>(SO<sub>4</sub>)<sub>3</sub> — Tl<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> — H<sub>2</sub>O: il solfato doppio 1-4 ½ è anidro nel caso del tallio, diidrato, invece, in quello del potassio. È interessante il fatto, che il composto 1-1-2 acquista, per la sostituzione del tallio al potassio, un campo di esistenza molto più

considerabile. È questo un fatto interessante, sul quale avremo occasione di ritornare nel corso delle nostre ricerche. Descriveremo, ora, molto brevemente i tre composti ottenuti.

Il composto I-4½ è una polvere bianca, la quale al microscopio risulta costituita da piccole tavolette esagonali (Fig. 2), le meno spesse delle quali appaiono delimitate lateralmente dalle faccette di una bipiramide esagonale (o di due romboedri, uno diretto e l'altro inverso corrispondenti ed ugualmente estesi). La birefrangenza è uniassica negativa, debole, senza anomalie ottiche. Si è posta particolare cura nello stabilire se il composto I-4½ era anidro od idrato. Dato l'elevato peso atomico del tallio, la quantità di acqua corrispondente ad un mono o ad un diidrato è tenue, ed anche le



Fig. 2

variazioni determinate nelle quantità percentuali di lantanio e di tallio risultano comprese entro i limiti ordinari delle oscillazioni delle analisi per il lantanio, e di poco più considerevoli per il tallio. Si ha, infatti:

	La	Tl	H <sub>2</sub> O
I-4½-0	9.81	64.77	—
I-4½-1	9.75	64.41	0.61
I-4½-2	9.69	63.96	1.26

Ora, nei corpi di fondo delle esperienze 3 a 7 non si sono avute che perdite di peso molto inferiori a quelle richieste dalla formula del mono idrato I-4½-1, e dovute, evidentemente, ad imperfetto essicamento del materiale sottoposto ad analisi e ad un principio di decomposizione. Inoltre, i valori ottenuti per il tallio sono tutti, ad eccezione di quello che si riferisce

all'esperienza 7, addirittura alquanto più elevati di quello teorico per il composto anidro. Quanto al corpo di fondo dell'esperienza 7, che contiene 64.19 % Tl, l'esame microscopico ha mostrato che si aveva a che fare appunto col sale doppio solito  $1-4\frac{1}{2}$ .

Il composto  $1-4\frac{1}{2}$  è stabile in contatto con soluzioni che contengono non meno del 2 %  $Tl_2SO_4$  e da o a 0.17 %  $La_2(SO_4)_3$ .

Il sale doppio  $La_2(SO_4)_3 \cdot 3Tl_2SO_4$  ha un campo di esistenza molto limitato: puro, è stabile in contatto di soluzioni con 1.8 % circa  $Tl_2SO_4$  e 0.25 % circa  $La_2(SO_4)_3$ . Costituisce una polvere cristallina, che al microscopio risulta costituita da piccoli e nitidi cristallini, monoclini, con *habitus* molto caratteristico, somigliante a quello di certi cristalli di petalite (Fig. 3 e Fig. 4). Presentano, come forme dominanti, un prisma, che si può assu-

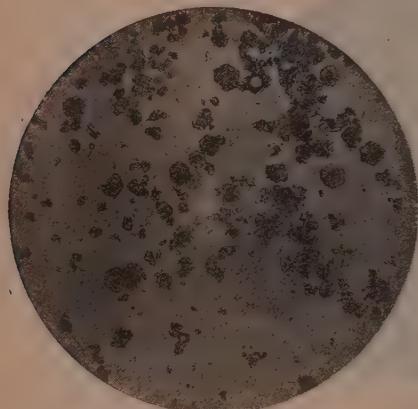


Fig. 3



Fig. 4

mere come verticale, ed un pinacoide parallelo all'asse *b*. Lo spigolo anteriore del prisma verticale appare sovente smussato da una esile faccetta di un pinacoide  $\{b\bar{o}\bar{l}\}$  che non è in zona con le faccie del prisma fra le quali giace. Vi deve essere una sfaldatura secondo un pinacoide parallelo a *b*, e talvolta, perciò, i cristalli sono come tagliati ad un estremo da una faccia di sfaldatura parallela al pinacoide in questione. Lo stesso pinacoide si osserva, però, talvolta, come faccettina naturale.

Alcuni cristalli del composto 1-3 sono abbastanza ricchi di faccie. Dal pinacoide  $\{b\bar{o}\bar{l}\}$  più esteso emerge la bisettrice, fortemente inclinata sulla normale al pinacoide stesso, di un grande angolo degli assi ottici. Il piano degli assi ottici è parallelo a  $\{010\}$ . Anche questo composto è certamente anidro. A  $150^\circ$  e  $200^\circ$  non si ha, praticamente, alcuna perdita di peso, solo a temperatura più alta se ne osserva una apprezzabile, che va, però, spiegata come nel composto precedente. Nell'esperienza 11<sup>a</sup>, poi, si è

formato anche un poco di  $I-I-2$ , come risulta chiaramente dall'esame microscopico, come pure nell'esperienza 9 si è formato un poco del composto  $I-4 \frac{1}{2}$ .

Il composto  $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Tl}_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  puro è stabile in contatto con soluzioni che contengono da 1.27 a 0.14%  $\text{Tl}_2\text{SO}_4$  e da 0.15 a 1.2%  $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3$ . Costituisce una polvere cristallina, che al microscopio appare formata da piccoli cristallini prismatici allungati. La direzione di allungamento è sempre positiva; l'estinzione, su certe facce, di solito più strette, è parallela all'allungamento, mentre sulle altre, più estese, forma con l'asse  $c$  un angolo di  $22^\circ$  circa. Si tratta, secondo ogni probabilità, di cristalli monoclini, con le forme {100} e {110}. Raramente si hanno terminazioni nette: quando esistono, sono, per lo più, costituite da un prisma che incontra i tre assi cristallografici, ed i cristalli vengono a somigliare, come *habitus*, a quelli di titanite delle rocce alcaline con la combinazione {110} {100} {111}. (orientazione di Des Cloizeaux).

Come negli altri solfati doppi già descritti, anche in questi col tallio l'acqua di cristallizzazione, quando esiste, viene eliminata solo a temperatura abbastanza elevata.

**Geologia.** — *I dati stratigrafici e paleontologici fondamentali per l'età secondaria dei Calcescisti e l'ipotesi di un grande carreggiamento della massa di questi, nelle Alpi franco-italiane.* Nota del Corrisp. Ing. SECONDO FRANCHI<sup>(1)</sup>.

Dopo le decennali discussioni su l'età della Zona delle Pietre Verdi<sup>(2)</sup>, le osservazioni stratigrafiche di Marcel Bertrand in Moriana e in Tarantasia (1894) e i ritrovamenti di fossili da me fatti subito dopo nella Valle Grana (1896), e nella Valle Maira (1897), nonchè quelli scoperti in seguito al Piccolo S. Bernardo (1899), al Colle della Seigne, presso Villeneue (1900), e nei calcari dolomitici di Chianoc in Val di Susa e il riconoscimento del Retico, quale zona di transizione fra le dolomie del Trias superiore e i Calcescisti stessi nella giogaia Grande Hoche-Chaberton, presso Melezet e al Roc del Boucher (1910) si ritenne come definitivamente stabilita, in massima, la sua età secondaria, senza escludere naturalmente che delle zone calcareo-scistose di altri orizzonti, inferiori e superiori, potessero aver assunto, per metamorfismo, analoghe od anche identiche forme litologiche.

(1) Presentato nella seduta del 28 febbraio 1925.

(2) Per brevità, indicherò questa formazione che, come è noto, equivale agli *Schistes Lustrés* dei Francesi e ai *Bündnerschiefer* dei Tedeschi, col nome di *Calcescisti con Pietre Verdi*, o semplicemente *Calcescisti*, mantenendo il vocabolo col c minuscolo per il semplice significato litologico.

È quindi con qualche meraviglia che io ho visto, or non è molto, rimessi in discussione, con interpretazioni contrarie a quelle date da M. Bertrand, alcuni contatti fra gli *Schistes Lustrés* e il Trias a *facies* brianzonese e, quello che è più grave, messo in dubbio il reale valore cronologico, rispetto a quella famosissima zona, dei più importanti giacimenti fossiliferi da me segnalati.

I miei amici P. Termier e W. Kilian, antichi colleghi nello studio delle Alpi franco-italiane, con varie note successive, presentate all'Accademia delle Scienze di Parigi nell'autunno 1920, trattando varie questioni riguardanti la geologia delle Alpi sopra indicate, insieme a molte osservazioni sulle quali mi trovo con essi in perfetto accordo, hanno espresso alcuni concetti ai quali io, come conoscitore del versante italiano di quella gio-  
gaia, sono dolente di non potere consentire. Io attesi ad esprimere le mie osservazioni nella speranza che, alle brevi note sintetiche, avrebbero fatto seguito più ampi lavori, i quali avrebbero permesso ai miei amici di chiarire e documentare meglio, e forse di modificare le loro idee, o almeno di spiegare qualche apparente contraddizione; ma ora, vedendo che tali lavori non vengono, mi decido ad esporre brevemente le mie contro osservazioni, cominciando da quelle riguardanti l'età dei Calcescisti.

Valgami la lunga amicizia a farmi scusare queste osservazioni critiche, dettate nell'intento di chiarire la verità, alto scopo cui hanno mirato colle loro note i miei illustri colleghi.

In una di esse<sup>(1)</sup>, dopo di avere posto il principio che « l'âge d'une série cristallophyllienne ne peut être déterminé avec précision que par l'observation du *passage latéral* des assises cristallines de cette série à des assises fossiliphères », si afferma che noi conosciamo finora due soli passaggi laterali da Calcescisti a terreni fossiliferi non metamorfici, e si citano: 1º) quello del Lias di Bonneval-Les-Bains a nord di Bourg-St. Maurice, in Valle dell'Isère e 2º) il passaggio a nord-est di Genova « des Schistes Lustrés, par diminution graduelle de cristallinité, à la série sédimentaire ophiolitique de l'Appenin ».

Mi sia permesso di osservare anzitutto che il principio posto è ingiustamente esclusivo, perchè vi si omette di parlare del grandissimo valore probatorio che hanno i fossili inclusi nelle assise cristalline stesse, e quelli inclusi in banchi visibilmente intercalati fra banchi di rocce cristalline, non essendo affatto escluso che delle rocce di alta cristallinità possano contenere dei fossili. E io posso aggiungere anzi che proprio a questi due casi corrispondono tutti i giacimenti fossiliferi scoperti nelle Alpi occidentali italiane, in grazia dei quali, per consenso di tutti i geologi, si ritenne defini-

(1) P. TERMIER et W. KILIAN, *Sur l'âge des Schistes Lustrés des Alpes occidentales.* « C. R. d. l'Ac. d. Sciences », t. 171, p. 1348, (s. 27 décembre 1920).

tivamente risolta la annosa questione <sup>(1)</sup>. A riprova mi sia permesso di citare i suddetti giacimenti fossiliferi, con l'indicazione delle rocce in cui i fossili sono inclusi:

*A)* Sono inclusi nei calcescisti tipici o in calcari cristallini micacei:

- 1<sup>o</sup>) Le ammoniti, le belemniti e i corallari (in colonie) della Valle Grana e particolarmente del Vallone di Narbona, com'è noto da tempo lo siano le belemniti del Passo di Nufenen e di altre località delle Alpi Pennine;
- 2<sup>o</sup>) Le belemniti attorno al Lago Verney e presso la strada del piccolo S. Bernardo, dove i calcescisti hanno direzione trasversale al confine franco-italiano;
- 3<sup>o</sup>) Le nummuliti più o meno obliterate dal metamorfismo e talvolta ancora ben conservate, del Nummulitico dei dintorni di Valdieri e di Vinadio (vedasi la fig. 1).



Fig. 1. - Rapporti stratigrafici fra Trias superiore e Calciscisti fossiliferi nelle valli Grana e Maira.

*Ts = cd = Dolomia principale; Rp = Retico a facies piemontese; Lp = cs = ms = Lias a facies piemontese; P = giacimento di *Wortenia solitaria*; B e Ar id. di belemniti e arietiti; Gy - id. di giroporelle; s = serpentina; eu = eufotide; pr = praslinite; c = calcare; qr = quarzite; ct = calc. crist. tab.; ms = micascisto.*

*B)* Sono invece inclusi in banchi di rocce intercalate nei calcescisti:

- 1<sup>o</sup>) Le belemniti delle breccie a elementi dolomitici, presso la maggior depressione del Colle della Seigne, a sud del Monte Bianco, dove i calcescisti attraversano pure la linea del confine franco-italiano;
- 2<sup>o</sup>) Gli *Encriinus* in-

(1) Ricordo il giudizio espresso dai professori Taramelli e Parona, dopo la visita fatta in compagnia dell'Ing. Zaccagna e dello scrivente alle principali località fossilifere, in un rapporto stampato nel « Bollettino del R. C. G. » del 1911 (parte ufficiale).

clusi in sottili filaretti dolomitici, interposti nelle micaliti squamose al castello di Val Mala, presso Dronero, e gli *Encrinus* inclusi in banchi di calcaro cristallini presso Villeneuve in Valle d'Aosta e in Valgrisanche; 3º) Le diplopore esistenti in banchi di calcari dolomitici, intercalati con calcescisti, micascisti, micaliti e quarziti micacei presso Bedale (Stroppo) in Val Maira.

C) Sono inclusi in zone calcescistose che servono chiaramente di transizione fra le dolomie del Trias superiore ed i Calcescisti: 1º) I fossili del Retico di Melezet (Bardonecchia), il quale è la evidente prosecuzione del Retico della catena Grande Hoche-Chaberton e del Retico della catena del Pic de Rochebrune, oltre confine; 2º) I fossili del Retico nella cupola del Roc del Boucher, poco al di qua di esso; 3º) I fossili del Retico raccolti al Colle Dojetto (*Didymia intusstriata* e *terebatula*), al limite superiore delle masse dolomitiche a diplopore del Vallone del Cugino, presso Bernezzo (vedasi la fig. 2).

D) Sono poi stati raccolti nella parte superiore delle masse dolomitiche, a pochissima distanza dal loro tangibile e graduale passaggio alla formazione dei calcescisti, con masse di prasiniti, di serpentine e di eufotidi: 1º) Le worthenie, le avicule, e i loxonema, alla sommità dell'anticlinali di Monte Chialmo, in Valle Grana; 2º) Gli stessi fossili nelle dolomie dell'anticlinali del Monte Bettone nel Vallone di Elva, in Valle Maira (vedansi i profili della fig. 1).

E) Sono infine stati raccolti nelle dolomie, a qualche distanza del loro limite coi Calcescisti, ma sempre a questi legate stratigraficamente, gli *Encrinus* di Piasco in valle Varaita (Stella), e quelli di Chianoc in Valle di Susa (Franchi).

Di tutti questi fatti sarebbe stato certo utile tenere, più che non siasi fatto, conto scrupoloso; e se si riflette che, nel trattare della stratigrafia e della tettonica del versante italiano delle Alpi Cozie, io avevo di mira la negazione dell'esistenza della trasgressione, voluta da chi sosteneva l'arcaicità dei Calcescisti, parrà tanto più evidente quanto sarebbe stato utile, nell'interesse della ricerca della verità, il rendersi conto del come io la inesistenza di tale trasgressione avessi cercato e fossi riuscito a dimostrare, da parte di chi, alla trasgressione aveva in animo di sostituire, in ipotesi, un ben più visibile contatto anormale, quale è quello dato da un grande careggiamiento (1).

(1) L'incomprensione, malgrado l'affinità della lingua, e la trascuranza dei lavori italiani, sono già stati causa che un geologo di grande valore, J. Boussac, sia caduto in gravi e incomprensibili errori; ripercuotentisi sulla geologia di vastissime regioni delle Alpi marittime franco-italiane. Tali errori, che io cercai di dimostrare, con carte geologiche e profili nel 1916, sono stati epistolarmente riconosciuti da uno dei migliori conoscitori del versante francese delle Alpi, con una lealtà che lo onora; ma una ulteriore discussione è tuttora desiderabile, per stabilire definitivamente i termini della serie eogenica tutt'attorno al Mercantour, verificando anzitutto se i *grès d'Annot* siano realmente la prosecuzione

Quanto ai due passaggi indicati da Kilian e Termier come soli esistenti, io non conosco quello dal Lias fossilifero ai calcescisti presso Bonneval-Les-Bains, ma non dubito della realtà di esso, anche per la conoscenza che ho di calcescisti includenti belemniti al piccolo S. Bernardo e al Colle della Seigne, come dianzi accennai. Io sono però spiacente di dover invece mantenere ora le riserve fatte anni sono, a proposito del suaccennato passaggio a nord-ovest di Genova, non essendosi scoperto dopo d'allora alcun argomento paleontologico e neppure alcuno stratigrafico di qualche chiarezza, a favore di esso. Lo studio dell'importantissimo quesito ha fatto qualche progresso dopo la scoperta fatta dal Prof. Repossi di una faunula della Dolomia Principale al Monte del Gazo, la quale, coi loxonema delle dolomie da me segnalati al Monte Torbi e col Retico, da me definito in molti punti dei dintorni di Isoverde, ci mostra la serie triasica superiore ben caratterizzata. Ma fra questo terreno e il Priaboniano tipico della Scrivia e della Polcevera, cui sovrasta, nei versanti orientali di quelle valli, la zona ad helmitoida, non sono stati trovati da me altri fossili che delle radiolarie indeterminabili (sullo stradale tra Voltaggio e i Molini). Regna dunque ancora in quella regione una grande oscurità, e si può dire, senza esitazione, che il passaggio affermato nel 1911 da Termier e Boussac sia ben lungi dall'essere dimostrato, per quanto la complessità del problema possa lasciare campo a molteplici ipotesi. In ogni caso, non è certo da una regione ancora così piena di enigmi che può venire della luce alla geologia delle Alpi occidentali, per le quali si posseggono invece documenti paleontologici e stratigrafici della più grande chiarezza e di indiscutibile valore.

Che dire poi dell'affermazione fatta dai colleghi francesi che « le fait de la superposition locale, en Italie, des Schistes Lustrés à des calcaires triasiques où l'on trouve *Worthenia solitaria*, ne peut plus être considéré une preuve irréfutable de la postériorité de ces schistes au Trias plus élevé, pas plus que le fait de leur superposition locale à des calcaires où l'on a trouvé des fossiles rhétiens ne prouve d'une façon absolue la posteriorité de ces schistes à l'Infralias » ?

D'accordo egregi colleghi: una sovrapposizione accidentale meccanica, per faglia o eventuale carreggiamento, non può avere, e la cosa è troppo ovvia perché occorra affermarlo, alcun valore nel senso stratigrafico; ma chi abbia letto attentamente quanto io scrissi, illustrando nel 1898<sup>(1)</sup> i profili del Monte Chialmo e del Monte Bettone, sui rapporti fra gli strati a *Worthenia solitaria* e i sovrastanti Calcescisti con Pietre Verdi, rapporti che il-

delle arenarie dei valloni di Pourriac e del Lausaniere, come indicherebbero le carte geologiche francesi, nel quale caso essi apparrebbero, al pari delle dette arenarie, indiscutibilmente all'Eocene, anzichè al Miocene (v. B. R. C. G. 1916).

(1) S. FRANCHI, *Sull'età secondaria della Zona delle Pietre Verdi*, « Boll. R. Com. Geol. 1898.

lustrai pure con speciali figure molto dimostrative, e abbia notato che, nel vallone di Narbona, i calcescisti contenenti ammoniti e belemniti sovrastanno, presentando con essi graduali passaggi, a calcescisti con corallari (probabilmente retici), i quali a loro volta ricoprono delle dolomie, che sono la visibile prosecuzione di quelle presentanti le *Worthenia* a Monte Chialmo; e abbia letto ancora quello che scrisse sul Retico del Melezet, il quale costituisce come alla Grande Hoche, al Chaberton e al Roc del Baucher il vero termine di passaggio tra le dolomie del Trias superiore (con *Avicula exilis*) e i Calcescisti<sup>(1)</sup>, non può che rammaricare che di documentazioni così chiare non siasi tenuto alcun conto; col risultato di far sembrare accettabile l'ipotesi di un carreggiamento, la quale invece, dopo un attento esame dei profili citati e di quello passante per la vetta del Monviso, sarebbe tosto apparsa inverosimile e inaccettabile (v. i profili della fig. 1).

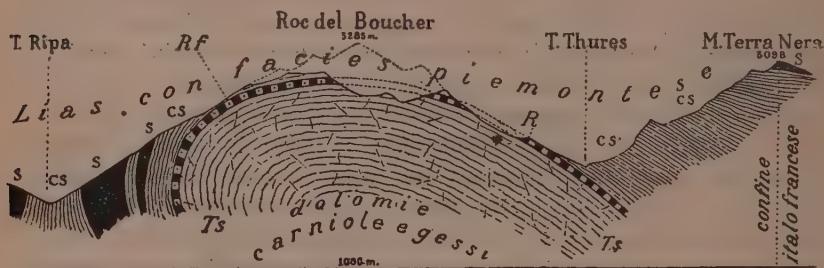


Fig. 2. — Amigdali cupoliforme di Trias del Roc del Boucher, nella grande sinclinale di Lias a facies piemontese di Bardonecchia, presso il confine franco-italiano.

Ts = dolomie del Trias superiore; R = Retico; Rf = Retico fossilifero; cs = calcivisti; s = serpentini.

E qui debbo ancora vivamente rrimpiangere che l'invito fatto dal Direttore del R. Ufficio geologico a P. Termier, quale Direttore del servizio geologico francese, a compiere con W. Kilian e con me alcune gite nelle Valli Grana e Maira e a Melezet, per quanto gentilmente accettato in principio, non abbia poi potuto avere seguito; perchè io ho la férma convinzione che quelle gite sarebbero state sufficienti a indurre i miei illustri colleghi a ricredersi dall'affermazione, invero per me poco lusinghiera, che: « les conclusions que l'on à précédemment tirées de la superposition des Schistes Lustrés à divers terrains fossilliphères sont fautives ou tout au moins mal fondées ». I fatti sono così chiari, come è dimostrato dai profili sopra riprodotti, che, dopo un esame attento e spassionato, nessun dubbio sarebbe stato possibile.

(1) S. FRANCHI, *Il Retico quale zona di transizione tra la Dolomia Principale ed il Lias a « facies » piemontese - calcescisti con belemniti e pietre verdi - nell'alta valle di Susa*, id. id., 1910. Id. id., *L'età e la struttura della sinclinale piemontese dopo la scoperta del Retico nell'alta valle di Susa*, id. id. 1911.

Intanto, forte della certezza assoluta che in tutte le regioni fossilifere elencate non esista traccia di contatto meccanico, séparante il Trias dai Calcescisti, e quindi nemmeno dell'ipotetico grande carreggiamento del *Pays des Schistes Lustrés* sul *Pays Brianconnais*<sup>(1)</sup>, per togliermi da un penoso dubbio ho voluto rivedere, per le regioni oltre confine, le osservazioni di un geologo, il quale contro i carreggiamenti non aveva certo nessuna préventione, cioè di Marcel Bertrand. Nel suo importantissimo e famoso lavoro del 1894, dal quale i colleghi francesi fanno datare la dimostrazione esauriente e definitiva dell'età secondaria degli *Schistes Lustrés*, il compianto Maestro, discutendo collo Zaccagna, il quale, per sostenere l'arcaicità di quegli scisti, affermava l'esistenza di importanti e chiare trasgressioni tra di essi e i terreni secondari *facies brianzone*, scriveva (p. 122-123)<sup>(2)</sup>:

« Nulle part, je n'ai pu voir cette discordance, et je ne connais pas une seule coupe qui constitue même un indice à sa faveur. Je suis retourné plusieurs fois voir toutes les coupes où Mr. Zaccagna indique la discordance, je me suis astreint à chercher tous les contacts et à les toucher du doigt. Je puis affirmer que partout, sans exception, la concordance est absolue et complète ». E, all'obiezione, che le concordanze fossero meccaniche, il Bertrand stesso risponde: « Si la discordance par place peut être effacée, elle se retrouve dans l'ensemble des observations. Or ici la concordance existe partout, même avec passages ménagés des deux *facies*. J'ajoute que toute mes recherches, jusqu'au milieu de l'année dernière, ont été faites, avec l'idée très arrêtée que les schistes lustrés étaient paléozoïques, que je n'avais donc aucune prévention contre une discordance qui aurait été toute naturelle, et même presque nécessaires, pour expliquer l'absence du Houiller, si développé dans le voisinage. Je crois donc pouvoir être absolument affirmatif sur ce point ».

Queste poche linee, scritte coll'abituale chiarezza e incisività da M. Bertrand, le quali potrebbero sembrare dettate per sostenere la tesi dell'assenza del grande carreggiamento accennato sopra, sono naturalmente in evidente antitesi con le recenti osservazioni di P. Termiers e W. Kilian, i quali hanno affermato invece che in tutta l'estensione del limite fra Calcescisti e Trias, per oltre 100 chilometri, dal confine della Tarantasia al Guil, si osserva ovunque un contatto meccanico, che essi ritengono dovuto all'ipotetico grande carreggiamento degli *Schistes Lustrés* sui terreni del brianzone.

Io non intendo certo erigermi a giudice nel contrasto fra così eminenti geologi, e mi limito ad osservare che, se dovesse risultare che le osservazioni non corrispondenti ai fatti siano quelle di M. Bertrand — nemmeno i grandi geologi sono infallibili — noi dovremmo cessare, d'ora innanzi,

(1) P. TERMIER et W. KILIAN, *Le bord occidental du pays des Schistes Lustrés dans les Alpes Franco-italiennes, entre la Haute-Maurienne et le Haut-Queyras*, « C. R. d. l. Ac. d. Sciences », t. 171, p. 885 (l. 8 nov. 1910).

(2) M. BERTRAND, *Etudes dans les Alpes françaises* « Bull. Soc. Geol. », 3<sup>e</sup> serie, t. XXII.

dall'attribuire al suo lavoro del 1894 ogni valore probatorio, per ciò che concerne l'età secondaria dei Calcescisti; quel valore grande e assoluto che noi vediamo invece da Termier e Kilian tuttora attribuito, nelle stesse loro note, nelle quali, per contro, viene a tale valore vibrato un così grave colpo demolitore.

O io mi inganno a partito, o qui c'è una patente contraddizione, che non dovrebbe essere sfuggita, e della quale io aspetto la spiegazione dai miei illustri colleghi di Francia.

Nell'attesa dirò intanto quale sia il mio pensiero in riguardo dell'ipotesi del grande carreggiamento da essi supposto, esaminandola naturalmente alla luce delle osservazioni che si possono fare in territorio italiano.

Il rovesciamento dell'anticlinale triasica dei Tre Re sul Retico e sui Calcescisti, cioè verso levante, nei dintorni di Bardonecchia - rovesciamento da me ripetutamente illustrato - il rovesciamento delle pieghe della catena Grande Hoche-Chaberton, nella stessa direzione, e, al di là delle grandi faglie trasversali del Monginevro e del Massiccio di Pietre Verdi Gimont-Chenaillet - corrispondente ad una zona di sprofondamento - il rovesciamento, sempre verso levante, della costiera del Pic del Rochebrune, sul Retico e sui Calcescisti, la evidente struttura a cupola del Trias del Roc del Boucher, incappucciata dal Retico e dai Calcescisti, come è dimostrato dalla sezione trasversale di essa della figura 2, nonchè il generale rovesciamento verso la pianura del Po, delle pieghe e delle stratificazioni nelle valli della Dora, del Chisone, del Pellice, della Varaita, della Maira, dell'Alta Valle dell' Ubaye e del Grana, oltre alla continuità di deposito e ai passaggi graduali attraverso a delle formazioni caratteristiche e talora fossilifere, fra Trias superiore e Calcescisti, mi hanno convinto della assoluta inaccettabilità del concetto che possa esistere un qualsiasi grande carreggiamento di Calcescisti, il quale abbia scivolato sulle formazioni triasiche delle valli italiane, per invadere, verso occidente, i terreni a *facies* brianzone (1).

Le osservazioni che si possono fare in territorio italiano sembrerebbero quindi in pieno accordo con quelle fatte nel 1884 da M. Bertrand e illustrate col suo ormai celebre lavoro. Ma non sarò io a volere attribuire al geniale pioniere dei grandi carreggiamenti, oltre ai suoi grandi meriti, il dono della infallibilità, e amo credere che i miei amici Ternier e Kilian,

(1) Qui credo utile osservare che il lembo esotico di anageniti presso il confine nell'alta Valle Maira, del quale ho parlato in questi « Rendiconti » (seduta 4 novembre 1924) non può avere nessun collegamento colle anticinali del Trias fossilifero dei Monti Chialmo e Bettone, le quali sono completamente incappucciate dai Calcescisti, e mostrano solo l'Eotrias affiorante presso Pradleves, sotto gli 800 metri di potenza delle dolomie del Trias medio-superiore.

Io ho indicato nelle carte al 400.000, parlandone poi in diversi lavori, un limitato carreggiamento di scisti permiani sul Trias e sul Lias a *facies* piemontese, presso Borgo San Dalmazzo, avente direzione anormale verso sud-ovest, ma esso non ha nessuna visibile continuità a sud del Gesso o a nord della Stura.

per impostare una così grandiosa ipotesi, in contrasto colle precedenti osservazioni del grande Maestro di geologia alpina, avranno avuti dei validi argomenti. Ed io, pur negando che in favore di essa ne esistano in territorio italiano, specialmente in corrispondenza delle località fossilifere - nè essi ne hanno indicati e definiti di accettabili - sono vivamente ansioso di conoscere l'ulteriore sviluppo delle argomentazioni, che essi certo ci offriranno.

In una nota successiva dimostrerò che le dolomie con *Wortenia solitaria* delle anticlinali dei monti Bettone e Chialmo sono parti integranti del Trias a facies cristallina delle valli Maira e Grana, il quale, verso sud-est, passa alla facies da me detta *monregalese* (1906), in cui le dolomie sono molto subordinate o possono anche mancare.

**Zoologia.** — *I Gametogeni impuri, i Gameti impuri e le Coniugazioni accessorie in "Cryptochilum echini" Maupas.* Nota del Corrisp. ACHILLE RUSSO<sup>(1)</sup>.

Nella Nota precedente<sup>(2)</sup> ho riferito che i due *Individui misti*, costituitisi dopo la *Coniugazione vera* o principale, dividendosi, formano ciascuno due *Gametogeni*, di cui uno ha origine dalla regione posteriore ed ha un micro ed un macronucleo, l'altro dalla regione anteriore ed ha un micronucleo e due macronuclei. Il primo di tali *Gametogeni* è puro, perchè sia il micro sia il macronucleo hanno la stessa origine, provenendo entrambi da un micronucleo globuliforme; il secondo è impuro, perchè il micronucleo ha origine dal m. globuliforme, i due macronuclei hanno invece origine dal micronucleo virgoliforme del Gamete originario. I *Gametogeni puri* formano, per divisione del micro e del macronucleo, *Gameti puri*, atti ad una nuova copula vera; i *Gametogeni impuri*, dividendosi, formano invece *Gameti impuri*, atti anche a coniugarsi, ma che danno luogo, per i particolari processi che essi compiono, a *Coniugazioni accessorie*, dopo le quali si formano nuovi Gameti puri, capaci di nuove Coniugazioni vere, per cui si rinnova il ciclo principale del *Cryptochilum*.

Nella grande varietà di forme, sotto cui si presenta l'apparato nucleare dei *Cryptochilum*, quando si osserva una goccia del liquido intestinale dello *Strongilocentrotus lividus* Brandt, fissata e colorata opportunamente, è assai difficile darsi ragione di ciascuna di esse. La ricerca e la identificazione dei *Gametogeni impuri* è resa poi più intrigata dal fatto che forme similari, aventi cioè un micronucleo e due macronuclei, si riscontrano in un'altra sorgente di Gameti, durante il ciclo vitale del *Cryptochilum*, e propriamente nei

(1) Presentata nella seduta del 28 Febbraio 1925.

(2) Questi «Rendiconti» Vol. XXXIII, Fasc. 7<sup>o</sup>-8<sup>o</sup>.

*Gametogeni*, che si costituiscono dopo le *Coniugazioni accessorie*. In questo caso però, come sarà esposto in altre Note, sia gl'individui con tre macronuclei ed un micronucleo, formatisi dagli exconiuganti, sia quelli con due macronuclei, formatisi da questi per scissione, sono da considerare tutti quali *forme pure*, perchè i macro ed i micronuclei si costituiscono per due successive divisioni da un solo nucleo: il *nucleo migrante*, costituitosi nella fase finale della *Coniugazione accessoria*.

I due *Gametogeni impuri*, che chiamo A<sup>1</sup> e B<sup>1</sup>, come avanti fu detto, hanno entrambi due macronuclei ed un micronucleo, ma fra loro si distinguono, perchè questo in quello A<sup>1</sup> è di forma perfettamente globosa, in quello B<sup>1</sup> invece, specialmente appena si è costituito dopo la divisione dell'*Individuo misto B*, è ovoidale, appuntito ad un estremo.

Questi due Gametogeni compiono due successive divisioni; con la prima ciascuno di essi forma due *Gameti impuri*, che hanno il micronucleo globoide; con la seconda da ciascuno di questi si formano altri due *Gameti impuri*, che hanno invece il micronucleo allungato, piriforme o spiniforme. In totale, dalla prima divisione dei Gametogeni impuri A<sup>1</sup> e B<sup>1</sup>, si formano 4 Gameti impuri, con micronucleo globoide, con la seconda se ne formano 8 con micronucleo allungato.

#### 1<sup>a</sup> Divisione del Gametogene impuro A<sup>1</sup>.

In questo Gametogene il processo di divisione s'inizia con le trasformazioni del micronucleo, il quale dapprima assume la forma di un fuso, in cui la cromatina è sparsa su le fibre fusoriali. Questa ben presto si porta ai due estremi del fuso, dove si condensa in due masse omogenee, che si allontanano sempre più, mentre nella parte interposta si osservano delle fibrille di sostanza nucleare. A misura che le due masse cromatiche polari si allontanano fra di loro, le fibrille intermedie, raggruppandosi, costituiscono un grosso filamento, che si colora intensamente soltanto mediante le sopraccolorazioni, ottenute con l'Ematossilina ferrica.

Mentre le due masse cromatiche, che nel frattempo hanno assunta una forma perfettamente globosa, si portano ai due poli del Gametogene, il filamento si assottiglia ai due estremi e si stacca dai micronuclei, per essere riassorbito dal protoplasma.

I due macronuclei, che, in un primo stadio, sono addossati l'uno all'altro, a poco a poco si allontanano fra loro, portandosi vicino ai micronuclei, che si sono già situati ai due estremi del Gametogene.

A questo stadio il protoplasma presenta nella sua parte mediana un solco trasversale, che inizia la divisione del corpo cellulare. Procedendo sempre più la formazione del solco, il Gametogene si divide in due nuovi individui, ciascuno dei quali ha un macronucleo ed un micronucleo con forma di globo.

Le forme derivate dal Gametogene impuro A<sup>1</sup>, costituiscono *Gameti impuri*, che, come si dirà, sono atti a copulare. In tali Gameti, mentre il macronucleo rimane 1/8, cioè quale esso era nell' *Individuo misto*, il micronucleo, per effetto della divisione, è divenuto 1/16.

### 1<sup>a</sup> Divisione del Gametogene impuro B<sup>1</sup>.

In questo Gametogene anche il micronucleo inizia la divisione cellulare; esso però si divide per *amitosi* e senza eliminazione di parte della sostanza nucleare, sotto forma di filo. Similmente a quanto fu osservato

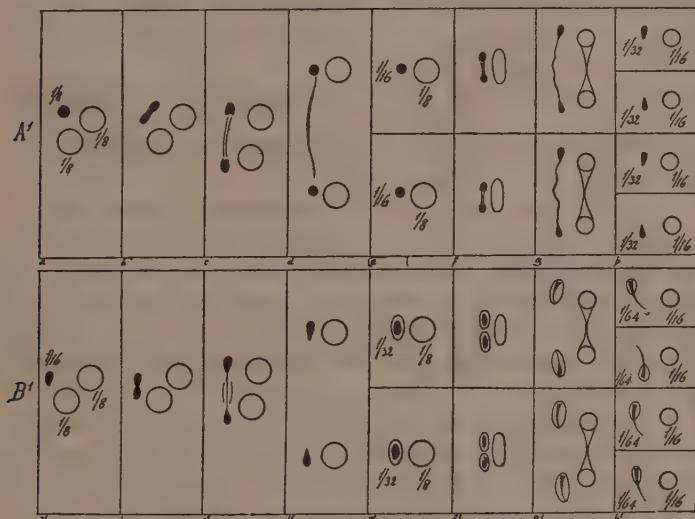


Fig. 1<sup>a</sup> – Stadii della moltiplicazione dei *Gametogeni impuri A<sup>1</sup> e B<sup>1</sup>*.

- A<sup>1</sup> = a) Apparato nucleare del *Gametogene impuro*, che deriva dall'*Individuo misto A*.  
b, c, d) Stadii della 1<sup>a</sup> divisione mitotica del micronucleo, con emissione di sostanza nucleare sotto forma di un filo; i due macronuclei si allontanano tra loro, portandosi ciascuno ad un polo del Gametogene.  
e) Gameti impuri con micronucleo globuliforme, costituitisi dopo la 1<sup>a</sup> divisione del Gametogene.  
f, g) Stadii della 2<sup>a</sup> divisione mitotica del micronucleo ed emissione di sostanza nucleare, sotto forma di filo. Il macronucleo si divide per amitosi.  
h) Gameti impuri, costituitisi dopo la 2<sup>a</sup> divisione, con micronucleo piriforme.
- B<sup>1</sup> = a) Apparato nucleare del *Gametogene impuro*, derivato dall'*Individuo misto B*.  
b, c, d) Stadii della 1<sup>a</sup> divisione amitotica del micronucleo; i due macronuclei si portano ciascuno ai poli del Gametogene.  
e) Gameti impuri, costituitisi dopo la 1<sup>a</sup> divisione, con micronucleo globoide.  
f, g) Stadii della 2<sup>a</sup> divisione. I micronuclei si circondano di un vacuolo proprio, dentro il quale compiono la loro trasformazione, divenendo allungati spiniformi.  
h) Gameti impuri, formatisi dopo la 2<sup>a</sup> divisione, con micronucleo spiniforme.

nell'*Individuo misto B*, del quale questo Gametogene deriva, il micronucleo si allunga e si strozza nel mezzo, la cromatina si condensa ai due estremi, mentre la parte media, per il progressivo allontanarsi delle due masse

cromatiche, si assottiglia sempre più. In ultimo, le due masse cromatiche polari si staccano e si portano ai due estremi del Gametogene, conservando, in un primo tempo, la forma di pera, mentre in seguito si arrotondano, divenendo quasi simili ai micronuclei, formatisi dal Gametogene precedentemente descritto.

Mentre avvengono le su esposte trasformazioni nel micronucleo, i due macronuclei si allontanano fra loro e si situano ai due estremi del Gametogene, vicino ai micronuclei. A questo stadio s'inizia la formazione del solco trasverso nella regione mediana del protoplasma, che prosegue fino a che il Gametogene si scinde in due *Gameti impuri*, aventi un macro ed un micronucleo. In questi due nuovi individui il micronucleo è divenuto  $1/32$ , il macronucleo invece rimane  $1/8$ , cioè qual'era nell'*Individuo misto*.

*Divisione dei Gameti impuri, derivati dal Gametogene A<sup>1</sup> (2<sup>a</sup> divisione).*

I due Gameti impuri, che si costituiscono con la divisione del Gametogene impuro A<sup>1</sup>, si dividono alla loro volta e danno origine ad altri *Gameti impuri*. Questi non hanno il micronucleo di forma globosa, come i Gameti dai quali derivano, ma di forma allungata, ovalare o piriforme.

Il micronucleo con processo mitotico inizia la divisione, la quale si compie con emissione di un filamento nucleare, interposto tra i due nuclei, che ne derivano. I primi stadii di tale divisione, fino alla formazione del filo connettivo, sono simili a quelli descritti nelle precedenti mitosi del micronucleo globuliforme.

Il macronucleo inizia il processo di divisione, quando i due micronuclei si sono costituiti e sono situati ai due estremi del Gamete. Quando esso ha assunto la forma di un manubrio, il protoplasma forma un solco trasverso nella sua regione mediana ed inizia la divisione del corpo cellulare.

I due nuovi individui gametici, che ne derivano, hanno, per effetto di tali divisioni, il micronucleo ridotto ad  $1/32$ , il macronucleo ad  $1/16$ .

*Divisione dei Gameti impuri, derivati dal Gametogene impuro B<sup>1</sup> (2<sup>a</sup> divisione).*

Anche i due Gameti impuri, che ebbero origine dalla 1<sup>a</sup> divisione del Gametogene impuro B<sup>1</sup>, si dividono per formare altri Gameti impuri. Tale divisione s'inizia anche dal micronucleo, il quale si circonda di un vacuolo, dentro il quale si allunga, conformandosi da prima a losanga. Esso, nell'atto di dividersi non emette alcuna sua parte, sotto forma di filo, ma con processo amitotico si allunga e si strozza nel mezzo, dando origine a due nuovi nuclei, che subito si allontanano tra loro, circondandosi ciascuno da un vacuolo proprio.

Quando i due nuovi nuclei, circondati dal vacuolo, si sono situati ai due estremi del Gamete, assumono una forma molto allungata, che può

essere paragonata ad una spina o ad un chiodo più o meno ricurvi, in cui si distingue una parte ingrossata, contenente gran parte della cromatina, ed una parte assottigliata, che ne è quasi priva.

La forma di tali micronuclei, spiniformi o chiodiformi, viene assunta dai nuclei per la loro graduale trasformazione dentro il vacuolo, partendo, come si è detto, da un nucleo di forma ovoidale. Ciò spiega perchè i due nuclei, così costituiti, si possono trovare, negli individui che ancora non si sono separati, con la parte ingrossata rivolta in entrambi in avanti o pure rivolta ai due estremi o con posizione diversa nell'interno del vacuolo. La forma così caratteristica di questi micronuclei fa nettamente distinguere i Gameti impuri, derivati dalla 2<sup>a</sup> divisione del Gametogene impuro A<sup>1</sup>, da quelli derivati dal Gametogene impuro B<sup>1</sup> (1).

La divisione del macronucleo e la citodieresi avvengono con le stesse modalità precedentemente descritte.

In seguito alle divisioni del micro e del macronucleo, il primo, in ciascuno dei due Gameti impuri, è ridotto ad 1/64, il secondo ad 1/16.

#### 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> Coniugazione accessoria.

In relazione alla formazione di due sorta di Gameti impuri, che, come avanti fu detto, hanno origine dalla 1<sup>a</sup> e dalla 2<sup>a</sup> divisione dei Gametogeni impuri A<sup>1</sup> e B<sup>1</sup>, si riscontrano due diverse forme di Coniugazione, che chiamiamo *accessorie*, per distinguerle dalla *Coniugazione vera*, la quale si compie tra i *Gameti puri*.

La prima delle due coniugazioni accessorie si compie fra i Gameti impuri, derivati dalla 1<sup>a</sup> scissione dei *Gametogeni impuri*, e quindi in essi il micronucleo è di forma globulare; la seconda invece fra i Gameti, che derivano dalla 2<sup>a</sup> divisione, i quali perciò hanno il micronucleo di forma allungata piriforme o spiniforme. Questa seconda forma di coniugazione si riscontra più abbondante nei preparati per il maggior numero di Gameti impuri, che si costituiscono con la 2<sup>a</sup> divisione del Gametogene impuro.

Nelle due forme di coniugazione accessoria, uno dei Gameti deriva dal Gametogene impuro A<sup>1</sup>, l'altro dal Gametogene impuro B<sup>1</sup>. I Gameti impuri sono perciò fra di loro differenti, per la diversa quantità di sostanza nucleare, la quale può riferirsi anche in questo caso alla formula  $\dot{N} = \frac{n}{2}$ , come nei Gameti puri.

Che si coniughino Gameti di diversa origine e quindi con apparato nucleare differente, si rileva agevolmente nella 2<sup>a</sup> forma di coniugazione accessoria, perchè in essa il micronucleo di un Gamete, allo stato iniziale,

(1) Il micronucleo virgoliforme del *Gamete puro* si distingue perchè la parte grossa è di forma clavata e non si costituisce dentro un vacuolo, come il micronucleo spiniforme del *Gamete impuro*.

ha forma allungata, ma tozza e piriforme, mentre nell'altro Gamete è lungo, sottile e spiniforme con la parte ingrossata ricoperta da un vacuolo. Da quanto sopra si è detto, può dedursi che il primo deriva dalla 2<sup>a</sup> divisione del Gametogene impuro A<sup>1</sup>, il secondo invece dalla 2<sup>a</sup> divisione del Gametogene B<sup>1</sup>.

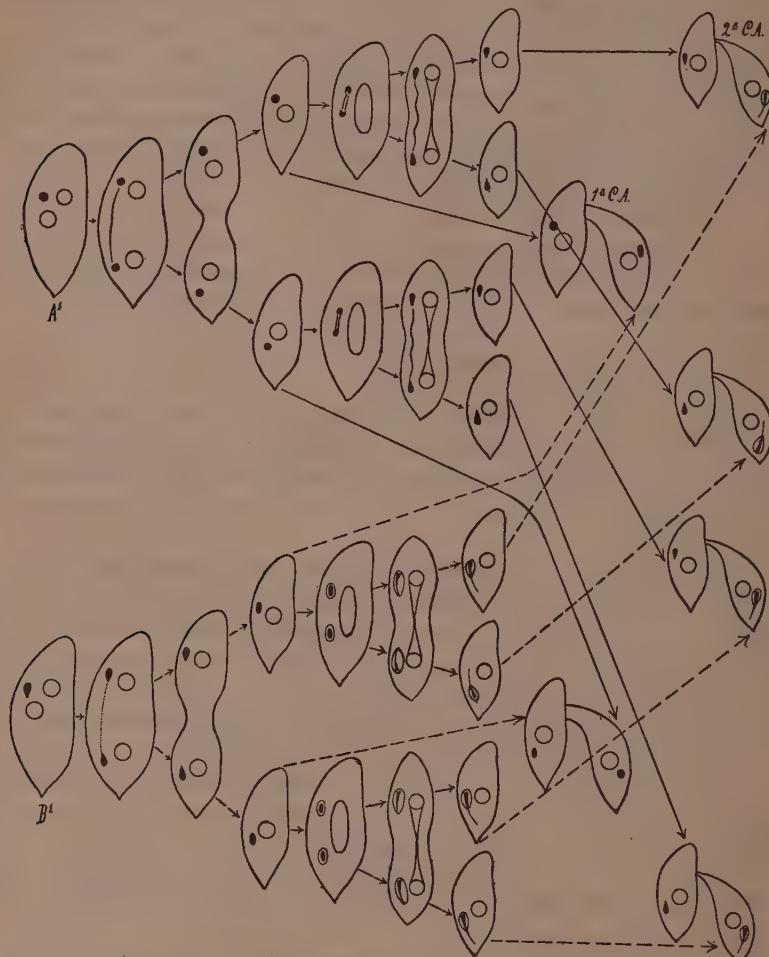


Fig. 2<sup>a</sup> — Rappresentazione della 1<sup>a</sup> e della 2<sup>a</sup> divisione dei Gametogeni impuri A<sup>1</sup> e B<sup>1</sup> e delle Coniugazioni accessorie, che ne derivano.

1<sup>a</sup> C. A.) Prima coniugazione accessoria tra Gameti impuri con micronucleo globoide, derivati dalla 1<sup>a</sup> divisione dei Gametogeni A<sup>1</sup> e B<sup>1</sup>.

2<sup>a</sup> C. A.) Seconda coniugazione accessoria tra Gameti impuri con micronucleo piriforme e micronucleo spiniforme, derivati dalla 2<sup>a</sup> divisione dei Gametogeni A<sup>1</sup> e B<sup>1</sup>.

Non sempre però, in questa forma di coniugazione, i micronuclei presentano la differenza sopra rilevata, essendo essi, in alcuni casi, uguali, cioè in entrambi i gameti di forma tozza, piriforme, o allungata spiniforme, mostrando con ciò che derivino dallo stesso Gametogene. Non ho potuto accertare se le coppie così costituite compiano i processi di coniugazione.

Non così agevole è dimostrare che anche nella 1<sup>a</sup> forma di coniugazione accessoria i due Gameti derivino l'uno dalla 1<sup>a</sup> divisione del Gametogene impuro A<sup>t</sup>, l'altro dalla 1<sup>a</sup> divisione del Gametogene B<sup>t</sup> e che quindi il loro apparato nucleare abbia composizione diversa. In questo caso, oltre la forma iniziale dei micronuclei, entrambi globuliformi, le scissioni, alle quali essi vanno soggetti, sono simili e procedono con lo stesso ritmo. Solo nella fase finale della coniugazione e propriamente nella 3<sup>a</sup> mitosi, con cui si formano i *nuclei migranti*, uno dei nuclei, nel dividersi, è in arreto rispetto all'altro. Tale fatto potrebbe dare un indizio della loro diversa origine, tenendo presente che i micronuclei dei *Gameti puri* iniziali hanno diversa accelerazione nei loro processi divisorii, durante la coniugazione vera, come esposti in una nota precedente (1).

*Divisioni anomalie dei Gametogeni impuri (Gameti impuri con due macronuclei, con due micronuclei e con micronuclei, derivati dalla scissione, di forma diversa).*

Nella fase finale della divisione del Gametogene impuro A<sup>t</sup>, dopo che i micronuclei di forma globulare si sono situati ai due estremi del protoplasma e vicino ad essi si sono portati i macronuclei, questi compiono, ognuno per proprio conto, una divisione. Si ottengono così due gameti impuri, ciascuno dei quali ha due macronuclei.

Tali gameti sono anche atti a copulare ed a compiere tutte le fasi della coniugazione, ma nelle coppie si è osservato sempre che solo uno dei gameti è fornito di due macronuclei.

Più raramente si è osservato che nel Gametogene impuro A<sup>t</sup>, oltre al macronucleo, si divide anche il micronucleo, avendosi perciò individui con due macronuclei e due micronuclei; tali forme però non furono mai osservate nelle copule.

Nella fase finale della 2<sup>a</sup> divisione del Gametogene impuro B<sup>t</sup>, in cui si costituiscono due micronuclei a forma di spina, anche i macronuclei, dopo che si sono costituiti, compiono una seconda divisione, producendosi così gameti con due macronuclei ed un micronucleo spiniforme.

Qualche volta si è osservato che i micronuclei spiniformi si trovano entrambi in uno dei gameti, che deriva dalla 2<sup>a</sup> divisione del Gametogene impuro. In un solo caso fu osservato che, vicino ad un gamete eon due

(1) Questi «Rendiconti», Vol. XXXIII, Sez. 5<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., fasc. 7<sup>o</sup>-8<sup>o</sup>.

micronuclei spiniformi ed un macronucleo, era anche un gamete col solo macronucleo, da poco isolatosi dopo la scissione.

Nella 2<sup>a</sup> divisione, sia del gametogene impuro A<sup>1</sup>, sia di quello B<sup>1</sup>, alcune volte si osserva che i micronuclei, derivati dalla scissione, non hanno la stessa forma allungata, piriforme o spiniforme. Nella maggioranza dei casi, mentre un micronucleo è piriforme, l'altro, posto all'estremo opposto, è globuliforme; o pure, come si osserva più raramente, mentre uno è piriforme e tozzo, l'altro è più allungato quasi spiniforme.

La diversità di conformazione, che contemporaneamente assumono i due micronuclei, fomatisi con la 2<sup>a</sup> divisione del Gametogene impuro, potrebbe confermare che la forma allungata da essi assunta normalmente, si costituisca per graduali trasformazioni, dipendenti da speciali adattamenti, del micronucleo globulare, la cui forma è da ritenere fondamentale o primitiva.

Le anomalie, sopra rilevate, non furono mai osservate nelle divisioni dei *Gametogeni puri* e quindi in nessuno degli individui, che compongono il *ciclo principale* del *Cryptochilum*. Per tanto, potrebbe ritenersi che le anomalie, osservate nel momento in cui si formano i *Gameti impuri*, siano dipendenti da attenuazione o comunque da un'alterazione del potere germinativo dei micronuclei, negli individui, destinati a produrre il *ciclo accessorio* di questo *Ciliato*.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Un teorema di confronto ed un teorema di unicità per l'equazione differenziale  $y' = f(x, y)$ .* Nota di ENRICO BOMPIANI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA<sup>(1)</sup>.

I. Alla condizione classica di Lipschitz che assicura l'unicità dell'integrale dell'equazione

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

uscente dal punto  $P_0(x_0, y_0)$  centro di un rettangolo R entro il quale la  $f(x, y)$  è superficialmente continua, Osgood<sup>(2)</sup> ha sostituito un criterio assai meno restrittivo ritrovato molto di recente dal Tamarkine<sup>(3)</sup>. L'enunciato di questi è il seguente: Se per due punti qualsiasi di R  $(x_0 \pm a, y_0 \pm b)$  aventi la stessa ascissa si ha

$$(2) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \varphi(|y_1 - y_2|)$$

(1) Presentata nella seduta del 1º febbraio 1925.

(2) « Monatshefte für Mathem. u. Physik », 9 (1898), p. 131.

(3) « Mathematische Zeitschrift », 16 (1923), p. 206.

ove  $\varphi(u)$  è una funzione positiva continua crescente di  $u (> 0)$  e  $\varphi(0) = 0$  e se

$$(3) \quad \lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^{u_0} \frac{du}{\varphi(u)} = \infty \quad (0 < u < u_0)$$

esiste uno ed un solo integrale di (1) passante per  $P_0$ .

2. È noto che con la sola ipotesi di continuità su  $f$  si può affermare l'esistenza (Peano, Mie, Arzelà, Osgood, Perron)<sup>(1)</sup> di integrali passanti per  $P_0$  tutti compresi fra due di essi, detti integrali *massimo* (o superiore) e *minimo* (o inferiore). Do qui un criterio per apprezzare il divario fra due tali integrali, cioè il modulo della differenza delle ordinate relative ad una stessa ascissa (per la quale tutte due esistono): esso è ricavato dal confronto della (1) con un'altra equazione (1'); e contiene in particolare un teorema di unicità per la (1).

Il criterio che espongo mi è stato suggerito dalla dimostrazione del Tamarkine. Esaminandola a fondo si riconosce che la condizione (3) serve soltanto ad assicurare l'unicità dell'integrale passante per l'origine della equazione

$$(4) \quad \frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

(altrimenti oltre la soluzione evidente  $u = 0$  vi sarebbe l'altra soluzione, distinta dalla precedente, ottenuta invertendo l'integrale  $\int_0^u \frac{du}{\varphi(u)} = x$ ).

Sicchè l'unicità della soluzione di (1) passante per  $P_0$  dipende dall'unicità della soluzione di (4) passante per l'origine.

Rilevata questa connessione fra la (1) e la (4) è facile vedere che lievi modificazioni al procedimento del Tamarkine portano ad un'affermazione più vasta.

Si faccia coincidere  $P_0$ , com'è possibile, con l'origine  $O$ . Nelle stesse condizioni di continuità per la  $f$  e limitandosi p. es. all'intervallo  $0 \leq x \leq a$ :

Se

$$(5) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \varphi(x, |y_2 - y_1|)$$

(1) « Mathematische Annalen », 76 (1915), p. 471. Le condizioni date dal Perron sono diverse da quelle classiche (e le comprendono). Precisamente egli ha dimostrato che: se le derivate a destra e a sinistra ( $D+$ ) di due funzioni, continue in  $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ ,  $w_1(x)$  e  $w_2(x)$  soddisfano, in quell'intervallo, alle diseguaglianze  $D_+ w_1 \leq f(x, w_1)$  e  $D_+ w_2 \leq f(x, w_2)$  e  $w_1(x_0) = w_2(x_0) = \varphi_0$ , gli integrali passanti per  $P_0$  sono compresi (ed esistono) nel campo  $T$  limitato dalle due curve  $y = w_1$ ,  $y = w_2$  uscenti da  $P_0$  e dalla parallela all'asse  $y$  condotta per  $x_0 + a$ .

$\varphi(x, u) \geq 0$  ( $u \geq 0$ ) e per ogni  $x$  è  $\varphi(x, u)$  funzione non decrescente di  $u$  (e superficialmente continua), la differenza fra due integrali della (1) uscenti da 0 si mantiene, in valore assoluto, non superiore al valore del massimo integrale passante per 0 dell'equazione

$$(1') \quad \frac{du}{dx} = \varphi(x, u)$$

per ogni  $x$  per la quale esistano.

Se in particolare  $\varphi(x, 0) = 0$  e se la (1') ammette un solo integrale passante per l'origine, anche la (1) ammette un solo integrale passante per 0.

3. Siano  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  due integrali della (1) passanti per l'origine e sia

$$(6) \quad v(x) = |y_1(x) - y_2(x)| \quad ; \quad v(0) = 0.$$

Dalla (1) stessa segue, tenuto conto della (5)

$$(7) \quad v(x) \leq \int_0^x |f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_2(\xi))| d\xi \leq \int_0^x \varphi(\xi, v(\xi)) d\xi$$

quindi

$$0 \leq \frac{v(x) - v(0)}{x} \leq \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(\xi, v(\xi)) d\xi$$

e perciò

$$(8) \quad 0 \leq v'(0) \leq \varphi(0, v(0)) = \varphi(0, 0)$$

Si consideri ora la funzione ausiliare definita da

$$(9) \quad \frac{d\zeta}{dx} = \varphi(x, \zeta) \quad ; \quad \zeta(0, b) = b > 0$$

cioè la curva integrale della (1') passante per il punto  $(0, b)$ . Dimostriamo che nell'intervallo  $0 - a$  è  $0 \leq v(x) < \zeta(x, b)$  (sempre per  $b > 0$ ).

Infatti

$$(10) \quad \zeta(x, b) = b + \int_0^x \varphi(\xi, \zeta(\xi, b)) d\xi$$

quindi

$$(11) \quad \zeta(x, b) - v(x) \geq b + \int_0^x [\varphi(\xi, \zeta(\xi, b)) - \varphi(\xi, v(\xi))] d\xi$$

e perciò  $\zeta(0, b) - v(0) \geq b > 0$ : Inoltre posto

$$\Delta = \frac{1}{x} \left\{ \zeta(x, b) - v(x) - [\zeta(0, b) - v(0)] \right\} =$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^x [\varphi(\xi, \zeta(\xi, b)) - \varphi(\xi, v(\xi))] d\xi - \frac{v(x)}{x}$$

risulta

$$\frac{1}{x} \int_0^x [\varphi(\xi, \zeta(\xi, b)) - \varphi(\xi, v(\xi))] d\xi \leq \Delta \leq \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(\xi, \zeta(\xi, b)) d\xi$$

quindi

$$0 \leq \varphi(0, b) - \varphi(0, 0) \leq \left\{ \frac{d}{dx} [\zeta(x, b) - v(x)] \right\}_{x=0} \leq \varphi(0, b)$$

Segue che  $\zeta(x, b) < v(x)$  in O e in un suo intorno. supponiamo che esista nell'intervallo  $0 - a$  un punto  $x_1$  tale che mentre

$$(12) \quad \zeta(x, b) - v(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq x < x_1$$

risulti

$$(13) \quad \zeta(x_1, b) - v(x_1) = 0,$$

Applicando la (11) per  $x = x_1$  a causa delle proprietà supposte per  $\varphi$  risulta  $\zeta(x_1, b) - v(x_1) \geq b$  in contrasto con la supposta (13). Quindi in tutto  $0 - a$  è  $\zeta(x, b) > v(x)$  qualunque sia  $b$  piccolo a piacere.

La  $\zeta(x, b)$  è per ogni  $b$  fissato funzione non decrescente di  $x$ ; e per ogni  $x$  fissato è funzione crescente di  $b$ . Si ha infatti, per  $b > b_1$ ,

$$(14) \quad \zeta(x, b) - \zeta(x, b_1) = b - b_1 + \int_0^x [\varphi(\xi, \zeta(\xi, b)) - \varphi(\xi, \zeta(\xi, b_1))] d\xi$$

quindi per  $x = 0$  è certo  $\zeta(x, b) > \zeta(x, b_1)$ . Se questa diseguaglianza fosse valida per  $0 \leq x < x_1$  mentre per  $x_1$  si avesse  $\zeta(x_1, b) = \zeta(x_1, b_1)$  applicando la (14) si avrebbe  $\zeta(x_1, b) > \zeta(x_1, b_1) + b - b_1$  in contrasto con l'ipotesi; sicchè  $x_1$  non esiste in  $0 - a$  ed è sempre  $\zeta(x, b) > \zeta(x, b_1)$ .

Segue da ciò che per  $b \rightarrow 0$ ,  $\zeta(x, b)$  tende per ogni  $x$  ad un limite ben determinato  $\zeta_0(x)$  e per esso si ha

$$0 \leq v(x) \leq \zeta_0(x).$$

È chiaro (e del resto ritornerò in seguito su questo punto) che  $\zeta_0(x)$  è l'integrale massimo passante per la origine della (1'); sicchè la prima parte del teorema è dimostrata.

Se poi  $\varphi(x, 0) = 0$  e se la (1') ammette un solo integrale passante per l'origine esso è necessariamente  $u = z_0 = 0$ , quindi anche  $v(x) = 0$  cioè  $y_1 = y_2$  e si ha così un teorema di unicità.

Queste circostanze si presentano appunto nelle particolari condizioni supposte per  $\varphi(u)$  da Osgood e Tamarkine.

4. Se non sembrasse evidente che un integrale della  $z' = \varphi(x, z)$  passante per  $(0, b)$  con  $b > 0$  ha per limite per  $b \rightarrow 0$  l'integrale superiore della stessa equazione uscente dall'origine, si potrebbe dimostrare con tutto rigore così.

Si consideri la funzione  $y = h$ ; per essa  $y' = 0$  e  $\varphi(x, h) \geq 0$  sicché  $y' \leq \varphi(x, h)$  quindi per un teorema di Perron<sup>(1)</sup> qualunque integrale passante per  $(0, h)$  è, per ogni  $x, \geq h$ . Se la retta  $y = h$  incontra l'integrale superiore (o massimo) passante per l'origine dal primo punto d'intersezione in poi (a destra) si segua questo integrale. La linea  $y = \omega(x)$  composta della retta  $y = h$ , oppure di un segmento di questa e poi della curva integrale detta è in tutti i suoi punti tale che  $D_{\pm} \omega(x) \leq \varphi(x, \omega(x))$  ( $D_+$  e  $D_-$  indicando le derivate a destra e a sinistra), quindi, sempre per il teorema di Perron  $z(x, h) \geq \omega(x)$  per  $h$  positivo piccolo a piacere. Se s'indica con  $\omega_0(x)$  il limite di  $\omega(x)$  quando  $h \rightarrow 0$ , si avrà pure  $z_0(x) \geq \omega_0(x)$ : ma qui vale necessariamente il segno =.

Infatti se esistesse un punto  $(x_1, y_1)$  con:

$$0 < x_1 \neq a \text{ e } \omega_0(x_1) < y_1 < z_0(x_1)$$

applicando ad esso il teorema d'esistenza nell'intervallo  $0 - x_1$  si troverebbe un integrale che non può attraversare  $y = z_0(x)$  (altrimenti passerebbe per un punto  $(0, h)$  e perciò  $z_0(x)$  non sarebbe il limite che s'è costruito): ma se  $\omega_0(x)$  è proprio il massimo integrale passante per l'origine l'integrale supposto non può esistere (perchè o va a passare per l'origine o incontra prima la  $y = \omega_0(x)$ , e in ogni caso questa non potrebbe essere il massimo integrale). Se poi  $\omega_0(x) = 0$ , poichè non possono esistere integrali di  $z' = \varphi(x, z)$  nel semipiano delle  $y$  negative uscenti dall'origine, non solo è  $\omega_0(x) = 0$  l'integrale superiore (quindi si ritrova la stessa impossibilità di prima) ma anzi è questo l'unico integrale per l'origine di (1').

(1) Vedi Nota 1, a p. 299.

**Matematica.** — *Un teorema sulla superficie del minimo ordine passante per una curva sghemba.* Nota di LETIZIA ONALI presentata dal Socio CASTELNUOVO <sup>(1)</sup>.

1. È noto che se ogni retta congiungente due punti di una curva incontra la curva in un terzo punto (almeno), la curva è piana.

Si dimostra pure facilmente che, se ogni conica passante per cinque punti di una curva sghemba incontra la curva in altri punti, la curva è situata sopra una quadrica.

È quindi naturale di pensare che questi teoremi siano casi particolari di una proprietà generale. Sussiste infatti il teorema:

*Se ogni curva piana d'ordine  $m$  che passi per  $\frac{m(m+3)}{2}$  punti di una curva algebrica sghemba incontra questa in altri  $\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$  punti (almeno), la curva sghemba è contenuta in una superficie d'ordine  $m$ .*

2. La dimostrazione è fondata sopra una nota proprietà differenziale delle congruenze  $\infty^2$  di curve <sup>(2)</sup>.

Ricordiamo che sopra ogni curva della congruenza esiste un gruppo di punti, fuochi, per ciascuno dei quali passa una curva infinitamente vicina della congruenza. Il numero dei fuochi appartenenti alla curva è noto, se essa è la intersezione completa di due superficie algebriche.

In particolare se la congruenza è costituita da curve piane di ordine  $m$ , si hanno  $m(m+1)$  fuochi sopra ogni curva  $C$  della congruenza; questi costituiscono il gruppo di intersezioni della curva con una certa superficie di ordine  $m+1$ , cioè con una curva di ordine  $m+1$  del piano di  $C$ .

Se sopra una  $C$  conoscessimo più di  $m(m+1)$  fuochi, tutta la  $C$  formerebbe parte della superficie focale. E se questo fatto si verificasse per ogni  $C$ , la detta superficie conterrebbe le  $\infty^2$  curve della congruenza.

3. Ciò premesso, supponiamo data una curva algebrica sghemba, tale che ogni curva piana di ordine  $m$  passante per  $\frac{m(m+3)}{2}$  suoi punti la incontri in  $\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$  altri punti.

(1) Presentata all'Accademia il 15 febbraio 1925.

(2) Cfr. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Vol. II, Cap. I.

Gli  $\infty^3$  piani dello spazio danno luogo ad un sistema  $\infty^3$  di tali curve, dal quale staccheremo una congruenza  $\infty^2$  imponendo a quelle curve la condizione di incontrare una retta arbitrariamente fissata nello spazio.

Sopra la curva generica  $C_m$  della congruenza noi conosciamo anzitutto

$$\frac{m(m+3)}{2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1 + 1 = m^2 + 3$$

fuochi situati nei punti di appoggio della  $C_m$  con la curva sghemba e con la retta. Ma gli  $m^2 + 2$  punti di appoggio colla curva sghemba traggono con sé altri  $m - 2$  fuochi su  $C_m$ . Infatti i fuochi su  $C_m$ , se sono in numero finito, costituiscono il gruppo delle intersezioni della  $C_m$  con una  $C_{m+1}$  (n. 2). D'altra parte le  $C_{m+1}$  passanti per  $m^2 + 2$  punti di una  $C_m$  (se esistono) segano questa in  $m - 2$  punti fissi, come risulta da un'applicazione immediata del teorema di Riemann-Roch alla serie  $g_{m-2}$  segata da quelle  $C_{m+1}$  sulla  $C_m$  (1).

Avremo così

$$m^2 + 3 + m - 2 = m(m + 1) + 1$$

e quindi infiniti fuochi sopra ogni  $C_m$  della congruenza.

Le  $\infty^2$  curve  $C_m$  costituiscono dunque una superficie contenente la curva sghemba assegnata.

La superficie non varia al variare della retta ausiliaria che ha servito a fissare la congruenza nel sistema  $\infty^3$  di curve di ordine  $m$ . Infatti, le superficie focali relative a due rette  $r$  ed  $s$ , hanno in comune le  $\infty^1$  curve  $C_m$  che si appoggiano a  $r$  e a  $s$ , e quindi coincidono. La detta superficie contiene  $\infty^3$  curve piane di ordine  $m$  e quindi è essa stessa di ordine  $m$ . D'altra parte essa contiene la curva sghemba e il teorema è dimostrato.

4. Segue dal teorema che se una curva sghemba d'ordine  $\geq m^2 + 2$  è segata da ogni piano in punti appartenenti ad una curva piana d'ordine  $m$ , la curva sghemba sta sopra una superficie d'ordine  $m$ .

L'analogia proprietà può non sussistere per le curve di ordine  $m^2 + 1$  o inferiore. Se si considera ad es. la curva sghemba formata dalla intersezione di due superficie d'ordine  $m$ , e da una retta, è chiaro che gli  $m^2 + 2$  punti di una sezione piana stanno sopra una curva d'ordine  $m$  del fascio determinato dalle sezioni piane delle due superficie, mentre la curva sghemba degenere non appartiene in generale a nessuna superficie di ordine  $m$ .

(1) Se la  $g_{m-2}$  avesse dimensione  $> 0$ , ogni curva aggiunta d'ordine  $m-3$  a  $C_m$ , passante per  $m-3$  punti di un gruppo della serie, passerebbe per il rimanente, mentre ciò non avviene per le curve aggiunte spezzate in  $m-3$  rette.

**Storia della matematica.** — *Sull'opera matematica di Paolo di Middelburg.* Nota del dott. D. J. STRUIK, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. *Gli scritti matematici di Paolo di Middelburg.* — Dell'opera scientifica di Paolo di Middelburg, nato a Middelburgo (Olanda), nel 1445, morto a Roma nel 1533, professore di astronomia a Padova nel 1480, vescovo di Fossombrone dal 1494, si sono considerati finora soltanto gli scritti sulla riforma del calendario. Sono gli studi di Kaltenbrunner<sup>(1)</sup> e di Marzi<sup>(2)</sup> che hanno analizzato profondamente l'importanza di questa parte dell'opera di Paolo di Middelburg. Vogliamo dar qui alcune notizie sui suoi scritti matematici<sup>(3)</sup>.

Si conoscono di Paolo tre pubblicazioni in cui egli si occupa di matematica. Esse sono un *judicium* astrologico per l'anno 1480, scritto probabilmente nel 1479, un *judicium* per l'anno 1481, scritto probabilmente nel 1480, e un libro sul numero degli atomi nell'universo, pubblicato nel 1518. Si trova una descrizione di questi libri rari nel Marzi<sup>(2)</sup>; i due *judicia* si trovano, assieme a molti altri scritti di Paolo di Middelburg nella biblioteca Alessandrina in Roma, il libro sugli atomi si trova in molte biblioteche di Roma (Alessandrina, Angelica, Acc. dei Lincei, Vittorio Eman., Vatic. Barber.).

2. *Paolo di Middelburg studioso di Archimede.* — Il *judicium* per l'anno 1480 (Bibl. Alessandrina, Incun. 277), descritto anche dal Favaro<sup>(4)</sup> contiene cento problemi che Paolo propose agli astronomi ed ai matematici. Il *judicium* del 1481 (Bibl. Alessandrina, Incun. 220) contiene la risposta a cinquanta di questi problemi. Una parte di questi problemi tratta di astronomia e di strumenti astronomici. Molti sono anche di matematica pura.

(1) F. KALTENBRUNNER, *Die Vorgeschichte der Gregorianischen Kalenderreform.* « Sitzungsß. Akad. Wien, Phil. Hist. Classe », 82 (1876), pp. 289-414.

(2) D. MARZI, *La questione della riforma del calendario nel Quinto Concilio Lateranense (1512-17).* Pubblicazione del R. Istituto di Studi Superiori, Sezione di Filosofia e Filologia, n. 27, Firenze, 263 pp. (1896).

(3) Uno studio sulla vita e l'opera di PAOLO DI MIDDLEBURG sarà da noi pubblicato nelle comunicazioni dell'Istituto Storico Olandese in Roma; solo per la matematica daremo, altresì un'esposizione più completa nel Periodico di Matematica. Nella prima pubblicazione daremo anche una bibliografia completa delle sue opere.

(4) A. FAVARO, *Intorno alla vita e le opere di Prosdocimo de' Beldomandi.* « Bull. Boncompagni », 12 (1879), p. 165 dell'estratto. (Roma, 1879, 213 pp.).

Questi problemi, sugli specchi istorii, la quadratura della parabola, la superficie di sfere e di cilindri, sui pesi, ci fanno conoscere Paolo di Middelburg come studioso di Archimede. Paolo appartiene dunque a quegli scrittori della fine del xv secolo, i quali, come Regiomontano, nella sua lettera a Roder (1476), Pier della Francesca, nella sua opera *De Corporibus regularibus* (1492), hanno preparato il terreno al futuro sviluppo del calcolo infinitesimale<sup>(1)</sup>. Il carattere di questi problemi non è uno sviluppo delle idee di Archimede, ma un'applicazione delle regole date dal grande matematico greco, p. e. nel problema 45, in cui domanda la superficie curva di ventiquattro colonne eguali, di cui è nota l'altezza e il diametro della base, o la superficie della sfera avente la stessa altezza del cilindro, ovvero il problema 57 nel quale si tratta di uno specchio istorio parabolico di cui è noto il fuoco, e si domanda di calcolarne un'altro il cui fuoco sia situato in altro luogo.

È anche notevole che Paolo faccia uso di un valore di  $\pi$  abbastanza preciso per l'età sua. Egli prende per  $\pi$  la media aritmetica dei due limiti dati da Archimede:  $\frac{1}{2} \left( 3 \frac{1}{7} + 3 \frac{10}{71} \right) = 3 \frac{141}{994} = 3,1418\dots$ . Ciò è notevole tanto più che, più tardi, Luca Pacioli conosce soltanto le disugualanze  $3 \frac{1}{8} < \pi < 3 \frac{1}{7}$ , tolte forse da Pier della Francesca<sup>(2)</sup>.

3. *Il problema dei corpi solidi che riempiono lo spazio.* — Ha particolare importanza il problema 49 che tratta dei corpi solidi che riempiono lo spazio. In fine si trovano le parole seguenti:

*Ex solutione istius patebit Aristotelen tertio celi et eius commentatorem Averroin commento errasse, ubi volunt quod 12 anguli pyramidis regularis replerent locum, immo nec 20 sunt sufficientes, ... etiam Thomam Berdvardinum in sua geometria hanc materiam de repletione loci insufficienter pertractasse.* Nella risposta ripete una simile osservazione. Si tratta dell'osservazione di Aristotele nel suo *De Caelo*, 3º libro, e del suo commentatore Averroe, nel commento a questo libro<sup>(3)</sup> che non soltanto i cubi, ma altresì i tetraedri

(1) Vedi G. VACCA, *Piero della Francesca nella storia dell'Algebra, ed i suoi tentativi di dimostrazione di due teoremi di Archimede*, «Rend. Acc. Napoli» (3) 26 (1920), pp. 232-236.

(2) G. MANCINI, *L'opera «De Corporibus Regularibus» di Pietro Franceschi detto della Francesca usurpata da Fra Luca Pacioli*. «Mem. Acc. Linc.», (5\*) Classe di sc. morali, ecc. 14 (1913), pp. 441-580, spec. p. 515.

Si ha così una risposta parziale al problema posto da M. CANTOR, *Vorl. über Geschichte der Mathematik*, II, (1900), p. 318, da quale autore PACIOLI possa aver tolto il suo valore di  $\pi$ .

(3) ARISTOTELIS *De Coelo* to. 306b, 5-8, ed. C. Prandtl (Lipsiae, Teubner), 1881.  
ARISTOTELIS *De Coelo... cum Averrois Cordubensis variis in eodem commentariis*, = ARISTOTELIS *Opera*, Quintum Volumen, Venetiis apud Ivnctas, M. D. LXII, p. 225b, p. 326.

regolari possono occupare lo spazio senza lacune. Più tardi Berwardino<sup>(1)</sup> aveva ripetuto il ragionamento di questi autori, enunciando però qualche dubbio; più tardi ancora, Regiomontano si è occupato del problema, ma il suo scritto non è stato ancora ritrovato. Era, si credeva finora, Maurolico, il quale scriveva nel 1529, colui che per la prima volta aveva riconosciuto l'errore di Aristotele-Averroé<sup>(2)</sup>.

Vediamo qui che Paolo di Middelburg pubblicò questa osservazione prima di Maurolico. Siccome Paolo, nella sua opera sulla riforma del calendario, nei suoi studi su Archimede, e nelle sue osservazioni sugli errori di Aristotele si occupa dei problemi posti da Regiomontano, suo predecessore a Padova, ed anche Maurolico era sotto l'influenza del grande matematico di Königsberg, è probabile che l'errore di Aristotele-Averroé sia stato scoperto per la prima volta da Regiomontano<sup>(3)</sup>.

4. *Le frazioni decimali.* — Nel libro sul numero degli atomi dell'universo (*De numero atomorum totius universi, contra usurarios*, Roma, 1518) Paolo, seguendo le idee di Archimede nel suo Arenario dimostra che un ducato, impiegato al 30% all'anno, dà in seicento anni un numero di ducati che si scrive con sessantanove cifre. Questo numero è maggiore del numero degli atomi che potrebbe riempire l'universo di Tolomeo compreso nella sfera delle stelle fisse, quando si accetti che un grano di sabbia contenga 10.000 atomi, questo numero scrivendosi soltanto con sessantasei cifre. Egli calcola perciò una tavola di potenze di 1,3; calcolando con precisione  $1,3^a$ ,  $a = 2, 3, \dots, 50$ .

In questo calcolo adopera un modo di scrivere che somiglia molto al modo di scrivere moderno delle frazioni decimali. Egli scrive p. e. nel seguente modo ciò che noi scriviamo:  $1,3^4 = 2,8561$ ,  $1,3^5 = 3,71293$ :

*Anno quarto habebit ducatos duos cum minutis 8561 de partibus 10000.*

*Anno quinto habebit ducatos tres cum minutis 71293 de partibus 100000.*

Per  $a > 8$  semplifica ancora la notazione:

*Anno nono habebit ducatos decem cum minutis 604499373.*

*Anno decimo habebit ducatos tredecim cum minutis 7858491849.*

Talvolta adopera la parola *fractionibus* invece di *minutis*.

Fino a  $1,3^{600}$  scrive esplicitamente il numero degl'intieri, per  $1,3^{600}$  ottiene così un numero di sessantanove cifre. Per calcolare il numero delle cifre per  $a > 600$  fino ad  $a = 10.000$  dà la regola seguente:

(1) THOMAS BERWARDINUS. *Geometria speculativa*, G. HERCATOR, Parigi, 1495.  
Bibl. Alessandrina, Incun. 501), Lib. IV, Ch. V.

(2) FRANCISUS MAUROLYCUS, *Liberus de impletione loci*, 1529. Bibl. Vitt. Eman., Roma, Cod. 34. Notizie tolte da L. DE MARCHI, *Di tre manoscritti del MAUROLICO che si trovano nella Biblioteca Vittorio Emanuele di Roma*, Biblioteca Mathematica, 1883, pp. 141-144, pp. 193-195.

(3) Per la storia del problema vedi G. VACCA, *Notizie storiche sulla misura degli angoli solidi e dei poligoni sferici*, Bibliotheca Mathematica, (3) 3 (1902), pp. 191-197.

« Quando  $1,3^a$  ha  $a$ , cifre, e  $1,3^b$  ha  $b$ , cifre,  $1,3^{a+b}$  ha  $a+b$  — 1 cifre » ; regola non sempre esatta ; ma che dà il risultato a meno di una cifra. Così egli trova che  $1,3^{10000}$  ha 1133 cifre.

Dovrà passare ancora molto tempo finchè Simone Stevino introduca le frazioni decimali, e Nepero i logaritmi.

Le considerazioni suddette ci mostrano in Paolo da Middelburgo un notevole precursore di questi due matematici <sup>(1)</sup>.

### Meteorologia. — *Sulla resistenza che la superficie terrestre oppone al movimento dell'aria.* Nota di EMILIO ODDONE, presentata dal Corrisp. L. PALAZZO <sup>(2)</sup>.

La resistenza che la superficie terrestre oppone al movimento dell'aria si dimostra complessa e variabile. A parità di sollecitazione la minor velocità del vento a terra dipende dalla maggior massa dell'aria per unità di volume, ma dipende altresì dalle resistenze meccaniche che presentano le asperità del suolo e la vorticosità dell'aria stessa. Comprovano queste resistenze frizionali locali, le maggiori velocità del vento sul mare rispetto a quelle sulla terra ferma.

Le forze frizionali furono introdotte da Guldberg e Mohn, nelle formole che portano i loro nomi, per mettere la legge barica dei venti in armonia coll'osservazione. Essi intuirono che se, presso terra, il vento ha una componente di moto nella direzione del gradiente, se in altri termini la forza centrifuga dovuta alla sua velocità, non è adeguata a controbilanciare la pressione, ciò devesi all'attrito interno dell'aria ed alla resistenza che oppongono gli ostacoli. Essi, e dopo di loro numerosi altri geofisici, verificarono che la reazione frizionale, o forza ritardatrice del vento, può ritenersi proporzionale alla velocità, ma verificarono pure che, da luogo a luogo e da momento a momento, il coefficiente di proporzionalità mutava, assumendo intanto valori molto maggiori del solito coefficiente d'attrito  $\mu$ , essendovi chi, per complicate configurazioni trovò un valore nell'aria libera di 300,000  $\mu$  ed al suolo uno 50 volte meno.

Così stando le cose, il problema di decidere come si esplicano le forze ritardatrici cui va soggetto il vento per via delle accidentalità del suolo, rimane ancora insoluto. Nella convinzione che le solite nozioni intorno alle resistenze d'attrito dei testi di meteorologia siano insufficienti e che, in un coll'attrito, sia da attribuire alle dimensioni delle vie che l'aria percorre,

(1) In CANTOR, op. cit. pp. 305 e 399, si trovano alcune notizie su altri due matematici, PIERO BORGHI e RUDOLFF, i quali al tempo di PAOLO DI MIDDELBURG si sono avvicinati alla nozione moderna di frazione decimale.

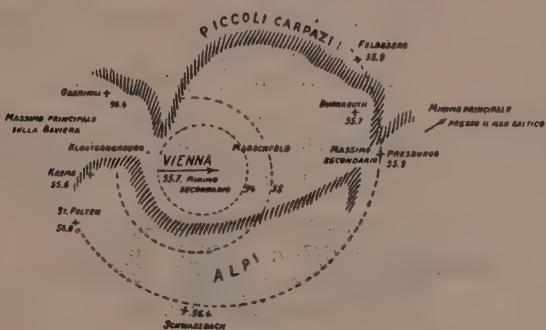
(2) Presentata nella seduta del 28 febbraio 1925.

l'azione preponderante, pensai di riprendere da capo il problema, incominciando a cercare risposta al seguente quesito:

Quando in regime ciclonico si producono venti violenti e per la speciale configurazione del terreno, l'aria è costretta a sorpassare una barriera montuosa, oppure ad attraversare un suo valico, le isobare al mare provano delle locali anomalie di pressione? I libri di meteorologia rispondono affermativamente, ma aggiungono che la questione non è ancora stata sufficientemente studiata.

Il primo materiale di verifica che ho raccolto viene dall'estero, dall'Austria.

L'illustre meteorologo prof. Margules<sup>(1)</sup> fece l'osservazione che quando nella conca detta Marschfeld, da Vienna a Presburgo, tra le Alpi ed i Carpazi, soffiano forti i venti occidentali provocati da un anticiclone sulla Baviera e da un minimo ciclonico sul mar Baltico, il locale gradiente di pressione



rinforzo del gradiente. Egli scrive: « Non vi è dubbio che questo fenomeno « dipenda dalla configurazione topografica della regione. Le masse d'aria, che « da NW, o da SW, si spingono contro questo luogo, subiscono una note- « vole diminuzione di sezione e conseguentemente acquistano una rilevante « velocità di movimento. In questo fenomeno, che forse per la prima volta « risalta con tanta chiarezza, l'aria si comporta come un liquido incompres- « sibile: là dove la sezione della corrente impiccolisce, subentra automatica- « camente un rinforzo nella velocità »<sup>(1)</sup>.

Dopo ciò ricorda che il luogo coincide coi minimi di pressione trovati dal prof. Margules in occasione di venti fortissimi, ed aggiunge: « Questi « minimi sono conseguenza della trasformazione dell'energia potenziale della « corrente aerea in energia cinetica; trasformazione non dovuta all'originaria « differenza di pressione, ma alle dimensioni geometriche forzate della cor- « rente; infatti tali minimi spariscono al cessare della corrente ».

Le citate osservazioni e considerazioni rispondono affermativamente al nostro quesito. Esse dimostrano che al trascorrere di venti violenti per vallate a diversa sezione trasversale sorgono locali, spiccate anomalie di pressione.

La spiegazione, a parer mio, riuscirà più persuasiva ricorrendo alla teoria dello smorzamento.

Assimilo all'uopo il paesaggio « Marschfeld » ad uno smorzatore, per esempio a quello della figura 2. In questo modello, quando il cilindro in-



Fig. 2

terno, che fa da embolo, muove rapidamente verso destra, subentra una rarefazione d'aria a tergo ad una compressione sul fronte. La differenza delle due pressioni è una contropressione che occasiona lo smorzamento dell'embolo interno. Nel paesaggio « Marschfeld » abbiamo una vallata chiusa ad occidente dalla stretta di Klosternenburg, e ad oriente dalla strozzatura di Presburgo. Quando si delinea un anticiclone ad Ovest ed un ciclone a Nord-Est sul mar Baltico, l'aria colla legge della formola (3), trascina l'aria della valle, come già l'embolo, e la costringe a lasciare una depressione a tergo e cagionare un incremento di pressione sul davanti. Con analogia con quanto succede negli strumenti di rarefazione e compressione (cito gli iniettori, la pompa Bunsen, il tubo Venturi, ecc.), vi è da aspettarsi, alla sinistra, una depressione sia in *A* dove la velocità dell'aria è alta, sia in *B* dove

(1) A. DEFANT, *Die Windverhältnisse im Gebiete der ehemaligen Oesterr. Ung. Monarchie*. « Jahrbuch der K. K. Central-Anstalt für Meteor. und Erdmagn. ». Wien, Jahrgang 1920, Neu Folge, LVII Bd.

l'aria trascinata è men veloce; alla destra, una compressione sia in C sia in D, ma specie in D, dove la velocità dell'aria è assai minore. La saccatura, o minimo secondario su Vienna, immediatamente dopo la stretta di Klosternenburg ed il promontorio od istmo di pressione secondario innanzi la stretta di Presburgo, trovano così la loro spiegazione.

Non sembri ardito il paragone tra le esperienze lungo vie tubolarmente chiuse e le citate osservazioni all'aperto, giacchè se le dette esperienze ai tubi si ripetono con vie canaliformi a sezioni variabili, aperte ad esempio verso l'alto, i risultati non cambiano di molto: dove la teoria prevede maggior pressione si avverte un rigurgito o salita del fluido che evidentemente è la conferma, in quanto alla maggiore altezza corrisponde un proporzionale aumento della pressione <sup>(1)</sup>.

Dimostrata la qualità e generalità del fenomeno converrà, per la definitiva verifica, passare alla sua valutazione quantitativa.

Mi riserbo di ciò fare, in una Nota successiva, avvalendomi di materiale meteorologico italiano.

**Chimica.** — *Clorovanadinite praseodimifera sintetica. (A proposito di un recente lavoro di W. Prandtl ed A. Grimm<sup>(2)</sup> sulla ricerca dell'elemento n. 61). Nota del dott. G. CAROBBI presentata dal Socio F. ZAMBONINI<sup>(3)</sup>.*

I metalli con numero d'ordine compreso fra 59 (Praseodimio) e 71 (Lutezio o Cassiopeo) costituiscono un gruppo di elementi molto caratteristico per il fatto che, contrariamente a quanto si verifica nel resto del sistema periodico, due elementi immediatamente successivi possiedono proprietà chimiche molto vicine, tanto che, com'è ben noto, riesce difficilissima la loro separazione.

Recentemente, Bohr ha spiegato genialmente questo singolare comportamento ammettendo che, man mano che aumenta di una unità il numero d'ordine degli elementi in questione, l'elettrone che si aggiunge, non entri a far parte dell'involucro più esterno di elettroni, ma bensì di uno di quelli più interni, non modificando, quindi, che pochissimo le proprietà chimiche.

(1) Poichè l'aerodinamica e l'idrodinamica seguono leggi simili circa, mi permetto di ricordare che, nel 1921, in visita, nel Messico, ai luoghi sinistrati da un immenso disastro sismico-fluviale, vidi tracce sicure di fango che, stramazzato in valanghe ed impossibilitato a transitare tutto per certe strozzature del fiume San Francisco, era salito in rigurgito fino a sessanta metri d'altezza! Ricordo pure che nel disastro del Gleno, i danni maggiori avvennero a monte delle gole più strette di valle di Dezzo.

(2) «Z. anorg. Chem.», 136, 283, 1924.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli. Presentato nella seduta del 28 febbraio 1925.

Il Prof. F. Zambonini <sup>(1)</sup> ha mostrato che le idee del Bohr e le conseguenti strutture atomiche ci danno ragione di molti fatti rimasti finora oscuri nella chimica delle terre rare.

È anche ben noto, che gli elementi in questione non possono collocarsi bene nel sistema periodico, ordinato secondo quanto propose Mendeleev e che si è ovviato all'inconveniente facendone una sezione particolare. W. Prandtl ed A. Grimm (l. c.) traendo occasione da una accurata ma infruttuosa ricerca dell'elemento 61 <sup>(2)</sup>, hanno di nuovo ordinato le terre rare nel sesto periodo del sistema periodico (come si è già fatto talvolta), così come risulta dalla seguente tabella parziale:

5B	6C	7N	8O										
13Al	14Si	15P	16S										
21Sc	22Ti	23V	24Cr	25Mn	26Fe	27Co	28Ni	29Cu	30Zn	31Ga	32Ge	33As	34Se
39Y	40Zr	41Nb	42Mo	43 —	44Ru	45Rh	46Pd	47Ag	48Cd	49In	50Sn	51Sb	52Te
57La	58Ce	59Pr	60Nd	61 —	62Sm	63Eu	64Gd	65Tb	66Dy	67Ho	68Er	69Tb	70Yb
71Cp	72Hf	73Ta	74W	75 —	76Os	77Ir	78Pt	79Au	80Hg	81Tl	82Pb	83Bi	84Po
89Ac	90Th	91Pa	92U	93 —									

Prandtl e Grimm ritengono che l'assenza dell'elemento 61 nelle terre da loro frazionate non sia accidentale, ma risieda nel fatto che, o l'elemento 61 non ha il carattere chimico di un metallo delle terre rare, ovvero addirittura non esiste. Ora, l'ordinamento su indicato fa apparire l'elemento 61 come un omologo del manganese, così come gli elementi, pure ancora ignoti, 43 e 75. Gli spazi vuoti in corrispondenza ai numeri 43, 61 e 75 si riproducono, perciò, periodicamente, e potrebbe darsi che non fossero riempibili (sempre secondo Prandtl e Grimm).

L'ordinamento proposto da Prandtl e Grimm si presta a molteplici obbiezioni, che mi astengo dal riferire qui, essendo a mia cognizione che il Prof. Rolla si propone di trattarle per esteso. Io mi limiterò a riassumere brevemente i risultati di alcune esperienze da me istituite per verificare l'attendibilità o meno della posizione risultante per il praseodimio.

Questo elemento verrebbe a risultare, infatti, quale un omologo del vanadio e del niobio, e Prandtl ne trae la conseguenza che l'ossido nero di praseodimio contiene questo elemento anche allo stato pentavalente, e che la formula  $\text{Pr}_6\text{O}_{11}$  è da interpretarsi come  $2\text{Pr}_2\text{O}_3 \cdot \text{Pr}_2\text{O}_5$ .

Se esiste una forma di praseodimio pentavalente, questa, anche se non è suscettibile di esistenza in composti puri, con ogni probabilità dovrebbe stabilizzarsi in presenza del vanadio pentavalente. Ho creduto perciò interessante di eseguire la sintesi di una clorovanadinite in presenza di praseodimio.

(1) «Rend. Acc. Lincei», XXXIII, 2<sup>a</sup> sem., 1924, p. 16.

(2) In un importante lavoro, pubblicato di recente, e dedicato allo studio della diffusione dei metalli delle terre rare nei minerali, V. M. Goldschmidt ha trovato varie volte indizi dell'elemento 61, ma sempre dubbi.

La clorovanadinite, com'è noto, è un minerale esagonale che si rinviene spesso misto a piromorfite ed anche a mimetite. La sua formula è  $3\text{Pb}_3(\text{VO}_4)_2 \cdot \text{PbCl}_2$ . Il piombo è spesso sostituito dal calcio (clorovanadinite di Wanlockhead <sup>(1)</sup> e Endlichite <sup>(2)</sup>), da zinco (clorovanadiniti di Cordoba <sup>(3)</sup>). Anche piccole quantità di rame (clorovanadinite di Yavapai <sup>(4)</sup>), e di ferro (clorovanadinite di Yavapai e clorovanadinite di Oracle, Arizona <sup>(4)</sup>) e anche di manganese (clorovanadinite di Cordoba <sup>(5)</sup>) sono state trovate nelle clorovanadiniti naturali, ma per quanto io sappia, nessun Autore vi ha riscontrato anche piccole quantità di elementi delle terre rare.

Il Prof. Zambonini <sup>(5)</sup>, recentemente, con estese e dettagliate ricerche, ha dimostrato che i composti dei metalli delle terre rare sono, in generale, isomorfi con quelli corrispondenti dei metalli alcalino-terrosi e del piombo: la miscibilità allo stato solido è in alcuni casi completa, in altri limitatissima. In base a queste ricerche, nelle clorovanadiniti praseodimifere, il praseodimio dovrebbe sostituire isomorficamente il piombo. Solo nel caso eventuale della formazione di un praseodimio pentavalente (isomorfo col vanadio secondo la disposizione citata del sistema periodico) si può pensare ad una sostituzione isomorfica di questi al vanadio pentavalente. L'analisi completa dei cristalli sintetici ci avrebbe, in ogni caso, senz'altro posto in grado di risolvere la questione.

La sintesi dei minerali del gruppo della piromorfite è stata risolta da numerosi Autori; mi limiterò a citare M. Amadori <sup>(6)</sup> che, recentemente, con un ampio e dettagliato lavoro, ha stabilito esattamente le condizioni di formazione di questo interessante gruppo di composti esagonali.

Il fatto che la sintesi si può eseguire in presenza d'aria, l'alta temperatura che si deve raggiungere e specialmente, ripeto, nel mio caso, la presenza del vanadio allo stato pentavalente, mi sono sembrate condizioni di ambiente molto favorevoli alla formazione del cloropraseodimato, se questo composto veramente era suscettibile di esistenza.

Io ho ottenuto la clorovanadinite che descrivo in questa nota, mantenendo per due ore a circa 1000° una miscela di gr. 10 di  $\text{Pb}_3(\text{VO}_4)_2$ , gr. 2  $\text{PbCl}_2$  e gr. 1 di  $\text{PrVO}_4$  <sup>(7)</sup> preventivamente disidratato. Dopo un raffreddamento molto lento la massa cristallizzata venne trattata su un filtro

(1) FRENZEL, « Min. Mith. », 3, 504, 1880.

(2) GENTH, « Ann. Phil. Soc. », 22, 365, 1885.

(3) « Rg. Ber. AK. Berlin », 661, 180 e 498, 1883. DOERING, « Bol. Acad. Cienc. Cordoba », 5, 498, 1883.

(4) GENTH, l. c.

(5) « Z. für Kristallographie », LVIII (Festband) 226.

(6) « Gazzetta », XLIX, p. 38.

(7) Una soluzione neutra di nitrato di praseodimio venne precipitata con una soluzione concentrata di ortovanadato sodico. Il vanadato di praseodimio che si forma, è una massa verde gelatinosa che al microscopio si presenta come una sostanza amorfa.

con  $H_2O$  bollente per eliminare, eventualmente, l'eccesso di  $PbCl_2$ . Il filtrato non dette però la reazione del piombo. Evidentemente l'eccesso di  $PbCl_2$  era tutto volatilizzato durante la fusione.

I prismetti esagonali di clorovanadinite da me ottenuti sono di colore verde-chiaro, rossastri in alcuni punti (com'è noto anche nel composto naturale si hanno cristalli rossastri)<sup>(1)</sup>. Non ho potuto osservare alcuna faccia terminale. Al microscopio, i cristalli poggiati su facce di prisma mostrano una forte birifrangenza. La direzione di estinzione è parallela all'allungamento.

La polvere è di un colore marrone scuro. I cristallini per l'analisi furono scelti ad uno ad uno con l'aiuto di una forte lente.

Il campione fu disciolto con  $HNO_3$ , diluito. Il piombo veniva dosato come  $PbSO_4$  raccogliendolo su un crogiolo di Gooch (ho tenuto presente il lavoro di V. Goldschmidt: *Ueber Vanadinit (Endlichit) von Hillsboro*, «Z. für Krystallographie»; 32, 561 (1900)).

In un altro campione si dosava il praseodimio tirando a secco la soluzione nitrica del minerale, liberata dal piombo con idrogeno solforato, e fondendo il residuo con nitro e carbonato sodico<sup>(2)</sup>.

Nel liquido ottenuto per lisciviazione della massa fusa, veniva dosato il vanadio precipitandolo come vanadato mercurioso e pesandolo come  $V_2O_5$ . Il cloro veniva dosato in un terzo campione sotto forma di  $AgCl$ . I risultati complessivi dell'analisi sono i seguenti:

	R. M.	
$PbO$	74.93	0.336
$Pr_2O_3$	2.15	0.007
Cl	2.65	0.075
$V_2O_5$	20.83	0.114
	100.56	
	0.60	O corrispondente a 2.65 di Cl
Totale	99.96	

Questi valori stanno assai bene d'accordo con la formula  $3Pb_3(VO_4)_2 \cdot PbCl_2$  che richiede  $PbO : V_2O_5 : Cl = 10 : 3 : 2$  cioè  $1 : 0.3 : 0.2$ .

È evidente che nella clorovanadinite da me analizzata il Pr sostituisce il Pb.

Dobbiamo quindi concludere, che nelle mie condizioni sperimentaliali, non

(1) DANA, *A system of Mineralogy*, p. 773.

(2) Precipitando con idrossido di ammonio il liquido da cui è stato separato il piombo come solfato, si ottiene un idrato di praseodimio, molto vanadinoso. Come pure precipitando lo stesso liquido, con acido ossalico, previa neutralizzazione con  $NH_4OH$ , si ottengono valori più bassi dei reali.

era suscettibile di esistenza una forma di praseodimio pentavalente isomorfa con il vanadio pentavalente, il che, secondo quanto ho riferito in principio di questa Nota, non è certo in appoggio alla disposizione delle terre rare nel sistema periodico proposta da Prandtl e Grimm.

La clorovanadinite descritta contiene il 3.34 % di  $\text{PrVO}_4$ . Credo che sia possibile di ottenere delle clorovanaditi contenenti una quantità un po' maggiore di praseodimio. Mi propongo di riferire su ciò in una Nota di prossima pubblicazione, in cui verranno studiate le sintesi di tutti i minerali del gruppo delle apatiti di piombo in presenza di metalli delle terre rare.

**Chimica-fisica.** — *Per una teoria elettronica del comportamento anodico dei metalli ed in particolare di quelli che presentano fenomeni di passività.* Nota di U. SBORG<sup>(1)</sup>, presentata dal Socio R. NASINI<sup>(2)</sup>.

I. — GLI ELEMENTI METALLICI, NEL SISTEMA PERIODICO  
DAL PUNTO DI VISTA DELLA CONFIGURAZIONE ELETTRONICA DEI LORO ATOMI.

In base alle idee più recenti sulla distribuzione degli elettroni negli atomi dei vari elementi, si può formulare la annessa Tabella periodica. Le considerazioni che hanno portato ad ammettere, come la più probabile allo stato delle nostre conoscenze, la distribuzione suddetta, sono state espresse in vari lavori che avrò occasione di citare tra breve, e magistralmente sintetizzate da G. N. Lewis nella splendida monografia « Valence and the structure of atoms and molecules »<sup>(3)</sup> e da N. Bohr in tre mirabili conferenze riunite nel volume « Les spectres et la structure de l'atome »<sup>(4)</sup>, cosicchè io mi limiterò qui ad una semplice illustrazione della Tabella quale è qui compilata ed a mettere in rilievo quei punti che sono essenziali allo scopo che mi propongo nel presente lavoro.

Nel I piccolo periodo gli elettroni dello strato interno sono due, quelli di valenza vanno da 1 a 8 e con questo si arriva al Neo: nel II piccolo periodo gli elettroni sono 2 nello strato più interno e 8 in quello più esterno: quelli di valenza vanno da 1 a 8: con che si arriva all'Argo.

Il Lewis chiama *nucleus* il nucleo positivo, chiama *kernel* il complesso formato dal nucleo e dai vari strati di elettroni, tolto lo strato degli elettroni di valenza: traduco *kernel* colla parola *nocciolo*.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale della R. Università di Pisa.

(2) Presentata nella seduta del 1º febbraio 1925.

(3) « The Chemical Catal. Company », New York, 1923.

(4) J. HERMANN, Paris, 1923.

Nella Tabella, i numeri tra parentesi indicano per ciascun elemento gli elettroni contenuti in ciascuno strato del nocciolo, a contare dallo strato più interno: il numero fuori della parentesi indica il numero degli elettroni di valenza.

Ora nel I grande periodo dapprima si ha, come al solito, la configurazione del nocciolo che si ha nel gas raro di partenza, ma col Titanio si inizia un nuovo tipo di configurazione e cioè: in uno stesso elemento, a seconda della valenza, alcuni elettroni possono passare dallo strato di valenza al primo strato esterno del nocciolo: si ha cioè ora, per la prima volta, l'esempio di uno strato del nocciolo a numero variabile di elettroni. Questo fatto continua in tutti gli elementi di transizione, si estende cioè fino al rame.

Debbo avvertire che non tutti gli atomi elettroisomeri o elettromeri (se così si vogliono chiamare) di uno stesso elemento sono da ritenersi esistenti o almeno dimostrabili sperimentalmente. Se ci si attenesse ai fatti di valenza noti, molti dei suddetti elettromeri sarebbero da escludere dalla Tabella<sup>(1)</sup>: ma io li ho notati tutti per indicare simmetricamente tutte le possibilità che si presentano.

Col Rame monovalente si raggiunge, come si vede, la configurazione (2-8-18) e con questa si arriva al Cripto, senza che ora si abbia più lo spostamento sopra descritto di elettroni dallo strato di valenza.

Nel secondo grande periodo si hanno fatti analoghi.

Nel III pure, ma qui vi è anche un altro fatto importantissimo e cioè: giunti al Cerio, la valenza non aumenta più continuamente per tutti gli elementi delle terre rare: aumenta invece di uno, per ognuno di questi elementi, il numero degli elettroni del secondo strato del nocciolo, finché si arriva a 32 elettroni. Allora (col Hafnio) la valenza ricomincia a crescere e intanto si ha anche la solita possibilità del passaggio di elettroni dallo strato di valenza al primo strato del nocciolo e questo continua per tutti gli elementi di transizione finché (coll'Oro) si raggiunge la configurazione (2-8-18-32-18): e con questa si arriva al Nito (2-8-18-32-18-8).

Il IV grande periodo si inizia nel modo consueto; ma si ferma all'Uranio.

Il Ladenburg formulò nel 1920<sup>(2)</sup> una distribuzione degli elettroni negli atomi che è sostanzialmente quella qui descritta: e questa distribuzione fu non solo accettata dal Bohr<sup>(3)</sup> ma da lui sostenuta con argomenti derivati dalla sua teoria. Debbo anzi notare che gli aggruppamenti sopra indicati sono schematici e riassuntivi: più propriamente la configurazione, per esempio, del Nito, secondo Bohr, sarebbe:

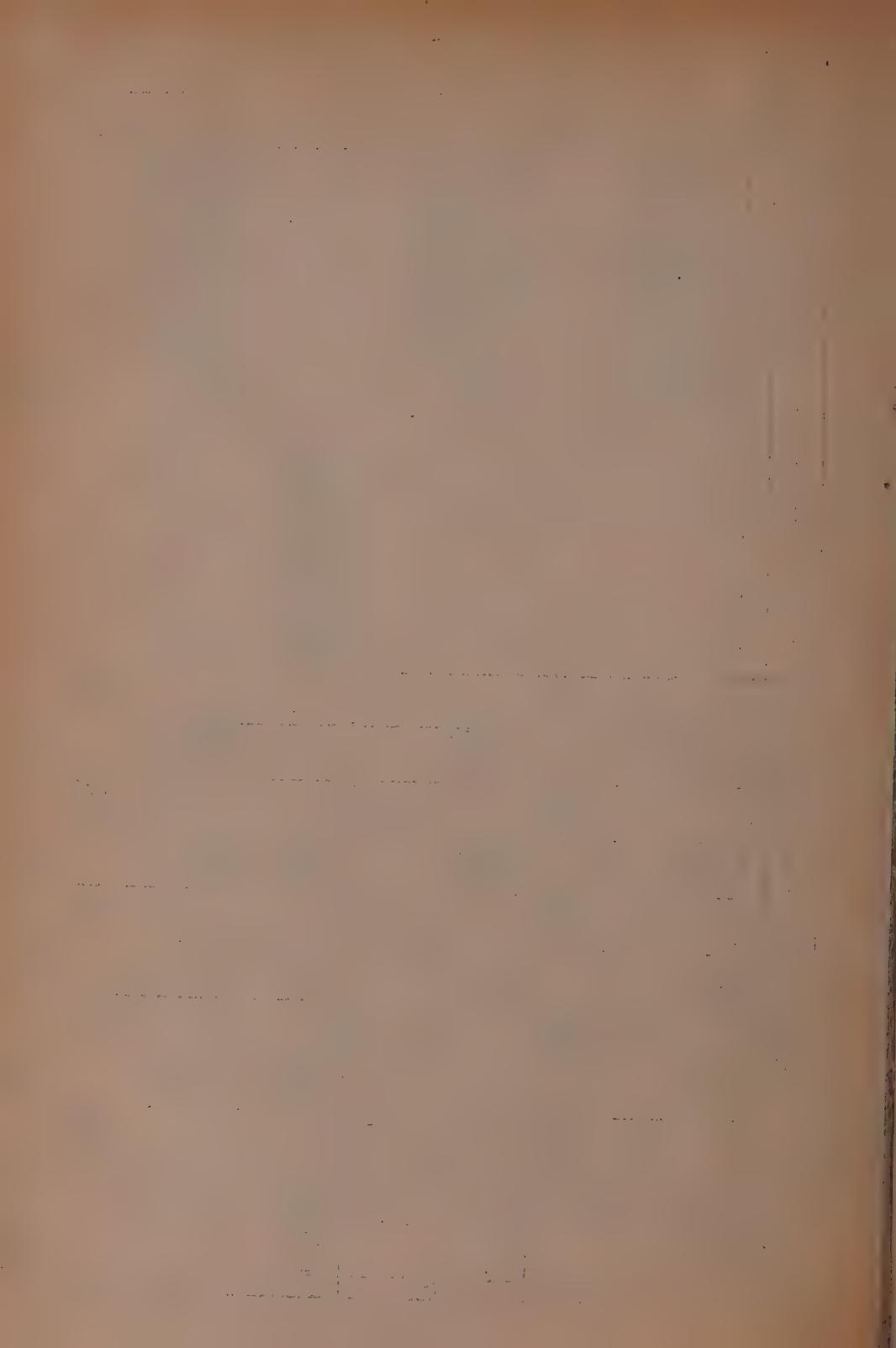
$$(2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 4).$$

(1) Confr. C. R. BURY, « Journ. Am. Chem. Soc. », 43, 1602, 1921.

(2) « Z. f. Elektroch. », 26, 262, 1920 - « Naturwissenschaften », 8, 5, 1920.

(3) Vol. cit., 3<sup>a</sup> Conferenza.





I primi due elettroni sono su orbite a 1 quantum, gli 8 seguenti a 2 quanta, poi 18 a 3 quanta, 32 a 4 quanta, 18 a 5 quanta, 8 a 6 quanta. Ma la notazione schematica adottata nella Tabella è sufficiente agli scopi che qui mi propongo.

Alle ragioni di indole chimica che suffragano tale interpretazione si aggiungono molte ragioni di indole fisica. Non solo infatti tutto questo è basato, nella trattazione di Bohr in uno stretto esame dei fatti sperimentali spettroscopici mirabilmente rivalutati secondo la sua teoria, ma alcune proprietà fisiche stanno in stretto rapporto colla configurazione singolare dei metalli di transizione. Il Lewis e il Ladenburg mettono in particolare rilievo le proprietà paramagnetiche di questi elementi di transizione, il che trova molte plausibili esplicazioni nelle condizioni in cui si suppone vengano a trovarsi gli elettroni che dallo strato di valenza si spostano nel nocciolo: e quelle proprietà sono certo uno dei più forti sostegni della loro ipotesi.

A me sembra ora che un altro grande complesso di fatti possa trovare la sua piena spiegazione nelle cose ora esposte — e cioè il comportamento anodico dei metalli: in particolare poi il comportamento di quelli che presentano i cosiddetti fenomeni di passività.

I metalli, secondo la configurazione elettronica esposta nella Tabella, possono infatti ripartirsi in tre categorie.

In una I categoria si hanno i metalli che presentano un nocciolo invariabile che è quello stesso del gas raro di partenza: essi sono Li, Be, Na, Mg, Al, K, Ca, (Sc), Rb, Sr, (Y), Cs, Ba, (La), Ra. Secondo il concetto di Lewis<sup>(1)</sup> che i metalli ionizzandosi perdono di solito tutti i loro elettroni di valenza simultaneamente, qui dove il nocciolo è invariabile, si deve avere valenza costante. È quello che l'esperienza, chimica ed elettrochimica, conferma pienamente.

Nella seconda categoria si hanno quei metalli e possiamo dire in generale quegli elementi dei grandi periodi nei quali si è raggiunta (attraverso gli elementi di transizione) la configurazione del nocciolo colla quale si arriva, senza ulteriori modificazioni, al gas raro da cui si inizia il grande periodo seguente. I metalli di questa categoria sono Zn, Ga, Ge, Cd, In, Sn, Tl, Pb, Bi.

Questi elementi presentano valenza variabile. Siccome qui non è più il caso di ammettere una variabilità del nocciolo, si deve pensare che gli elettroni di valenza possano qui essere ceduti anche a porzioni.

Il Lewis, nello stabilire che i metalli perdono probabilmente tutti insieme i loro elettroni di valenza, si parte dall'osservazione che il processo di ossidazione per es. di un solfuro a solfato è una cosa ben diversa dal processo di ossidazione di un sale ferroso a ferrico. Ed a prova — o indizio — di questo indica il fatto che nelle ossidazioni del primo tipo si va di solito di due in due unità di valenza (cioè di due in due elettroni), in quelle del secondo tipo si può andare anche di uno in uno<sup>(2)</sup>. Ora negli

(1) LEWIS, Mon. cit., p. 61.

(2) Mon. citata, p. 61.

elementi metallici di cui ci occupiamo in questa seconda categoria si va appunto di regola di due in due, nel passaggio di valenza.

Si potrebbe arrivare alle seguenti conclusioni:

1. Nei metalloidi gli elettroni di valenza possono essere impegnati anche a porzioni, generalmente due a due: ed il nocciolo rimane quindi sempre invariato.

2. I metalli che posseggono la configurazione del gas nobile di partenza perdono sempre insieme tutti gli elettroni di valenza ed il nocciolo rimane quindi invariato (sono i metalli della categoria I su descritta).

3. Gli elementi che seguono quelli di transizione e che hanno perciò raggiunta la configurazione del nocciolo colla quale si arriva al gas nobile seguente hanno un nocciolo invariabile, sicchè possono cedere come i metalloidi che essi precedono e a cui poi, del resto, preludono chimicamente, anche soltanto una parte degli elettroni di valenza. (I metalli di questo tipo appartengono alla seconda categoria).

4. Gli elementi di transizione hanno invece nocciolo variabile, sicchè ionizzandosi perdono di regola tutti gli elettroni di valenza come i metalli della I categoria, ma in corrispondenza della variabilità del nocciolo, il numero degli elettroni di valenza è variabile. Questi elementi appartengono alla terza categoria.

Con questa distinzione ogni grande periodo verrebbe ripartito in tre porzioni:

1. Elementi precedenti a quelli di transizione (configurazione del nocciolo, quella del gas nobile di partenza. Nocciolo fisso: valenza fissa. Ionizzazione di tipo metallico, cioè per perdita simultanea di tutti gli elettroni di valenza).

2. Elementi di transizione (Nocciolo variabile. Valenza variabile. Ionizzazione di tipo generalmente metallico).

3. Elementi susseguiti a quelli di transizione: premetalloidici e metalloidici (Nocciolo fisso. Configurazione del nocciolo, quella del gas nobile di arrivo. Valenza fissa nel I elemento (Zn, Cd). Valenza variabile e ionizzazione di tipo « metalloidico » (cioè anche per perdita parziale degli elettroni di valenza) negli elementi seguenti, fino alla fine del periodo).

Forse la fissità di valenza di Zn e Cd è un caso particolare del fatto che il passaggio di valenza per tutti gli elementi di questa categoria procede generalmente di due in due: allora per gli elementi bivalenti (Zn e Cd) l'unica ionizzazione ordinaria possibile è la totale e gli elementi presentano valenza fissa, pure rientrando in questo gruppo, dove negli altri elementi la valenza è variabile.

Nei primi due periodi, senza elementi di transizioni si passa dalla ionizzazione « metallica » alla « metalloidica ».

Vedremo in una prossima Nota come a questo si attagli il comportamento anodico dei metalli.

**Chimica agraria.** — *La clorosi alcalina della vite*<sup>(1)</sup>. Nota preliminare di U. PRATOLONGO presentata dal Socio MENOZZI<sup>(2)</sup>.

I.

La clorosi, intesa in senso lato e da un punto di vista sintomatico, quale mancata formazione o precoce disparizione del pigmento clorofillico dagli organi foliari, può trarre origine da cause svariate, non peranco tutte note forse, e soprattutto non sempre discernibili nelle loro manifestazioni.

V'è peraltro una forma di clorosi di gran lunga più nota e più diffusa delle altre forme, che, per concorde risultato di esperienze e di osservazioni, ripete la sua origine dall'alcalinità del mezzo che circonda l'apparecchio radicale. È la forma che fu per lungo tempo erroneamente designata col nome di « clorosi da calcare » e che converrà pertanto d'ora innanzi designare come « clorosi alcalina ».

Sul meccanismo attraverso il quale la reazione alcalina del mezzo o meglio un determinato grado di alcalinità del mezzo è atto a provocare la clorosi alcalina non si hanno che conoscenze piuttosto superficiali; a gradi crescenti di alcalinità delle soluzioni acquose corrispondono insolubilità via via crescenti dei composti ferrici, che assumono la forma tipicamente insolubile di idrato o di fosfato ferrico, e dei fosfati, che precipitano sotto forma di fosfati trimetallici insolubili<sup>(3)</sup>.

L'esperienza dimostra che a questo sospeso assorbimento ferrico e fosfatico da parte delle piante è legato l'insorgere della clorosi alcalina.

La pianta non subisce peraltro in genere passivamente l'azione permisiva dell'eccessiva alcalinità del mezzo, ma reagisce ad essa variamente, talora con la produzione di quantità più o meno ingenti di anidride carbonica, talora con l'emissione di acidi organici — è stata sicuramente constatata l'emissione di acido ossalico da parte dell'apparecchio radicale della sulla (*Hedysarum coronarium*) — o con altri mezzi, sì che nel fatto le diverse piante presentano un'assai diversa resistenza e adattabilità ai mezzi nutritivi dotati di vario grado di alcalinità.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 28 Febbraio 1925.

(3) M. SIDORINE, *Sur l'assimilation du fer par les plantes.* — (in russo). *Recueil des travaux du Laboratoire d'Agronomie*, Vol. X, p. 241-257, 1914. P. L. GILE e J. O. CARRERO, *Cause of Lime-induced Chlorosis and availability of Iron in the soil*; « Journal of Agricultural Research », Vol. XX, p. 33-62, 1920.

II.

La determinazione del grado di alcalinità atto a provocare in un vitigno determinato, franco di piede o innestato su un determinato soggetto, fenomeni di clorosi più o meno palesi e persistenti, può essere condotta per due vie diverse: la cultura sperimentale di vitigni diversi in terreni di alcalinità crescente sino al limite clorosante costituisce evidentemente il metodo d'indagine più diretta; l'osservazione dei casi di clorosi che la pratica presenta può consentire di trarre d'altro lato da un numero sufficientemente grande di rilievi le conoscenze conclusive che il metodo comporta.

Per necessità di cose ho dovuto attenermi a questo secondo metodo, la cui applicazione si rivela peraltro nel fatto tutt'altro che scevra di difficoltà.

L'alcalinità di un terreno presenta anzitutto variazioni stagionali piuttosto cospicue, in funzione soprattutto della temperatura, della piovosità, dell'evaporazione e dello stesso rigoglio vegetativo. Di più le condizioni di giacitura e di stratigrafia rendono di solito assai varia e complicata la distribuzione topografica e altimetrica insieme del grado di alcalinità di un terreno. Le sezioni dilavate dalle acque meteoriche presentano in luogo una alcalinità inferiore a quella che il terreno rivela in laboratorio; le sezioni su cui si raccolgono ed evaporano gli scoli dei terreni soprastanti presentano in luogo alcalinità superiori a quelle che il terreno rivela per sè nell'esame chimico.

Tali cause di variabilità rendono assai difficile e incerto il seguire a distanza la natura, le cause e le correlazioni di un fenomeno di clorosi.

Le osservazioni che mi fu dato raccogliere in questi primi due anni di ricerca (1923-1924) riflettono purtroppo tali difficoltà e tali incertezze.

Per cause indipendenti dalla mia volontà non mi fu possibile raccogliere in questi due primi anni di ricerca più larga messe di osservazioni. Riassumo pertanto nella tavola posta alla fine di questo fascicolo, le prime osservazioni compiute, in attesa che mi sia dato riprendere e compiere il lavoro d'indagine interrotto.

Tenute nel dovuto conto le incertezze e le difficoltà connesse al metodo stesso di osservazione e d'indagine, una serie di rilievi possono trarsi in linea preliminare dai dati raccolti nella tabella precedente:

1° - È assai varia la resistenza che i vitigni diversi presentano di fronte ad uno stesso grado di alcalinità del mezzo; le viti europee presentano da questo punto di vista la resistenza massima; minore è la resistenza dei vitigni americani e degli ibridi americano-europei; minima è la resistenza delle viti europee innestate su soggetto americano. L'innesto induce per sè una diminuzione della resistenza del soggetto rispetto all'alcalinità del mezzo.

2° - Le alcalinità dell'ordine  $P_R = 8,5 - 8,6$  riescono di regola innocue alle viti europee e alle viti americane franche di piede, ma spiegano

talora fenomeni di clorosi iniziale nelle viti europee innestate su soggetto americano meno resistente.

3° - A gradi di alcalinità dell'ordine  $P_h = 8,8 - 9,0$  resiste talora ancora qualche vite europea franca di piede e qualche vite europea innestata su soggetto americano di altissima resistenza (Berlandieri  $\times$  Riparia 420 A, ad esempio). La grande maggioranza delle viti europee, siano franche di piede o innestate su soggetti americani di resistenza minore, sono invece affette in genere da clorosi mortale.

### III.

Riveste carattere di particolare importanza dal punto di vista fisiologico e agrario la ricerca dei fattori o delle condizioni cui riferire tali alti gradi di alcalinità del terreno o, ciò che torna lo stesso, la ricerca dei fattori clorosanti.

L'alcalinità elevata di un terreno può dipendere da costituenti disciolti - carbonati alcalini, essenzialmente - nelle acque che imbevono il terreno stesso. È il caso non infrequente di molti terreni in piano su cui convergono e s'accumulano per deficenza di scolo gli scoli alcalini dei terreni soprastanti. Tali terreni sono frequenti lungo il corso del Po, ad esempio, e nel basso piano Padano; ma non offrono, dal punto di vista viticolo, che scarso interesse, chè non sono questi i terreni che la viticoltura predilige.

Di gran lunga più interessanti dal punto di vista viticolo sono i terreni la cui alcalinità ha la sua fonte nella stessa costituzione litologica del terreno, sì che il terreno, sottoposto anche a lavaggi ripetuti con acqua, presenta un'alcalinità costante e immutata.

Il problema di determinare quale tra i costituenti litologici noti o presumibili del terreno possa conferire al terreno stesso gradi di alcalinità atti a provocare la clorosi della vite è tutt'altro che nuovo alla ricerca.

Parve già un tempo che l'attività clorosante di un terreno potesse essere riferita alla *copia* del calcare presente nel terreno stesso. È agevole peraltro osservare che se le reazioni chimico-fisiologiche fra pianta e terreno si compiono unicamente pel tramite delle soluzioni acquose - nè è dato pensare ad altro modo di azione - la copia del calcare presente non può avere, per una nota legge fisico-chimica, influenza alcuna sulla composizione delle soluzioni che imbevono il terreno, o avrà tutt'al più un'influenza del tutto effimera non sulla composizione delle soluzioni, ma sulla velocità con cui è ristabilito l'equilibrio di solubilità continuamente turbato dalle precipitazioni atmosferiche, dalle variazioni termiche ecc. Ma non è ad un'azione di tale natura che può essere riferito un elevato grado di alcalinità del terreno e la clorosi che ne deriva.

Esclusa del resto dal duplice punto di vista teorico e sperimentale la possibilità di attribuire alla copia del calcare presente la genesi dell'alcalinità

elevata e quindi dell'attitudine clorosante, rimaneva un'ultima possibilità: quella di attribuire l'elevato grado di alcalinità e l'attitudine clorosante stessa alla varia solubilità del carbonato calcico nelle sue diverse modificazioni - *calcite, aragonite* <sup>(1)</sup> - e nei diversi gradi di *finezza* in cui può presentarsi nel terreno.

Alla conoscenza di tale duplice correlazione ho recato un primo contributo di ricerche dirette, i cui risultati sono raccolti in una nota preliminare recentemente presentata a questa Accademia.

È emerso dalla duplice serie di ricerche che la modifica - *calcite o aragonite* - e lo stato di suddivisione nel quale il carbonato calcico viene cimentato non sono senza decisa influenza sulla solubilità nell'acqua e quindi sull'alcalinità delle soluzioni acquose sature. Tale influenza è tuttavia ben lungi dal dar ragione dell'alcalinità elevata e quindi dell'attitudine clorosante di alcuni terreni calcari; nei quali l'alcalinità raggiunge talora il grado  $P_n = 9.0$ , il che esprime un'alcalinità presso che decupla dell'alcalinità che la calcite e l'aragonite, anche in stato di finissima suddivisione, possono conferire alle loro soluzioni acquose sature.

Per quanto è dato concludere in base a queste prime ricerche di carattere preliminare, nessun nesso causale è dato stabilire fra l'elevata alcalinità o l'attitudine clorosante del terreno e la presenza, la copia o la finezza del carbonato calcico in esso contenuto.

Il rapporto tanto a lungo asserito fra calcare e clorosi alcalina, si che questa non è altrimenti nota che come *clorosi da calcare*, non trova nei fatti alcuna conferma, si bene è invece escluso da più di una ragione e teorica e sperimentale.

La ricerca dei costituenti litologici cui riferire le elevate alcalinità e l'attitudine clorosante di alcuni terreni, è problema petrografico e chimico non scevra di difficoltà. Tra i possibili costituenti litologici del terreno sin ora presi in considerazione, l'*idromagnesite*, le cui soluzioni acquose sature presentano il grado di alcalinità  $P_n = 9.2$ , è il solo su cui converga per ora qualche indizio favorevole.

(1) È anche relativamente diffusa la credenza che l'attitudine clorosante del terreno possa riferirsi al *calcare amorfo*; questa designazione, che i litologi non conoscono, non può essere altrimenti intesa che come *calcare finissimo*, il che riconduce l'ipotesi all'influenza che sul fenomeno spiega la finezza del calcare. Il *carbonato calcico amorfo* non è ignoto; ma ha esistenza affatto effimera.

**Mineralogia.** — *Studi sul quarzo. I cristalli di quarzo di Val Maggia e il loro interessante abito pseudo-emimorfo. Nota di CAVINATO ANTONIO<sup>(1)</sup> presentata dal Socio BRUGNATELLI LUIGI<sup>(2)</sup>.*

È noto che J. Koenigsberger ha osservato nei cristalli di quarzo del Canton Ticino<sup>(3)</sup> un frequente abito caratteristico, trigonale, acuminato, con prevalenza del romboedro {3031}, e di romboedri acuti alternantisi col prisma; abito che ha chiamato appunto « *Tessinerhabitus* ».

A. Bianchi, studiando alcuni cristalli di quarzo raccolti nel gneiss Ticino, dell'alta Valle Leventina<sup>(4)</sup>, e mettendoli a confronto con quelli di Val Devero, ha precisato e descritto le caratteristiche di un tale abito, e ha messo in rilievo le affinità fra i cristalli di quarzo delle due regioni, geologicamente corrispondenti, del Toce e del Ticino.

In seguito appunto alle conclusioni di questo lavoro, il prof. L. Brugnatelli ha richiamato la mia attenzione sopra una serie di interessanti e tipici cristalli di quarzo, a lui offerti dai sigg. Rasetti di Viggù, e da questi raccolti sulle pendici del Pizzo Piatto di Rodi in Val Maggia, sopra l'*Alpe dei Sassi*. E ha voluto gentilmente affidarli a me per lo studio; per la qualcosa lo ringrazio vivamente.

Notiamo anzitutto per quanto riguarda la natura geologica della regione indicata, che, al Pizzo Piatto di Rodi vengono a contatto l'*ortogneiss d'Antigorio* coi parascisti dell'Alta Val Maggia (i *Maggialappen* del Preiswerk, che questi<sup>(5)</sup> collega direttamente con il *gneiss di Lebendun*, che attraversa tutta l'alta Val Devero); e presso l'*Alpe dei Sassi* si perdono anche le ultime propaggini della sinclinale di *calcesisti* che, costeggiando il gruppo del Basodino, attraverso la Val Formazza e la Val Devero, raggiunge la regione del Sempione sulle Pendici del Pizzo Teggiolo (sinclinale di Teggiolo).

I quarzi raccolti sono accompagnati da clorite, talvolta inclusa, e da albite; di frequente anche da ematite in lamelle, da regolari cristallini di pirite limonitizzata, da mica bruna e tremolite filamentosa.

(1) Lavoro eseguito nell' Istituto di mineralogia della R. Università di Padova, diretto dal prof. A. Bianchi.

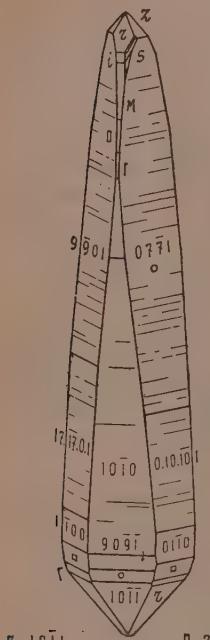
(2) Presentata nella seduta del 7 dicembre 1924.

(3) J. KOENIGSBERGER, *Geol. Beob. am Pizzo Forno, und Beschr. der Minerallagerst. des Tessiner Massivs.* « N. Jahrb. Miner. », 1908, B. B., XXVI, 488.

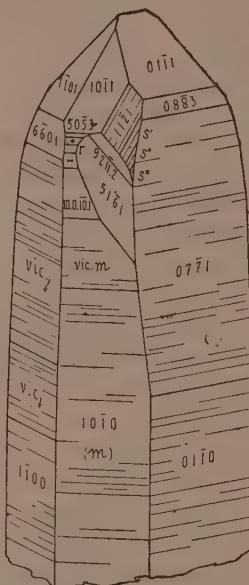
(4) A. BIANCHI, *Quarzo di Val Devero.* « Mem. R. Acc. Lincei », 1923, XIV e *Il "Tessinerhabitus"* ecc. « Rend. R. Acc. Lincei », 1923, XXXII.

(5) H. PREISWERK, *Die zwei Deckenkulminationen Tosa-Tessin und die Tessiner Querfalte.* « Eclogae geol. Helv. ». Vol. XVI, n. 4, 1921.

I cristalli sono limpidi e incolori, di dimensioni varie; i più grandi raggiungono gli 8 cm. secondo l'asse di massimo allungamento. Molti sono biterminati; pressochè tutti hanno forma allungata assottigliantesi gradatamente verso le estremità, sino a terminare in acuta punta. Molti poi, e sono i più tipici, hanno questo sviluppo acuminato da una parte sola mentre dall'altra si chiudono subito sul vertice del cristallo attraverso ad alcuni romboedri ottusi e al fondamentale.



$\chi \ 10\bar{1}1$  D 22.0.22.7  
 $2 \ 0\bar{1}\bar{1}$   $\vdash \ 50\bar{5}3$   $\Gamma \ 40\bar{4}1$   
 $5 \ 11\bar{2}1$  M 30̄31  $\square \ 15.0.\overline{1}5.2$



$\bullet \ 22.0.\overline{2}2.7$  19.20.39.19  $S'$   
 $\Gamma \ 40\bar{4}1$  20.11.21.10  $S''$   
 $\times \ 60\bar{6}1$  9.9.16.7  $S'''$

Fig. 1<sup>a</sup>.

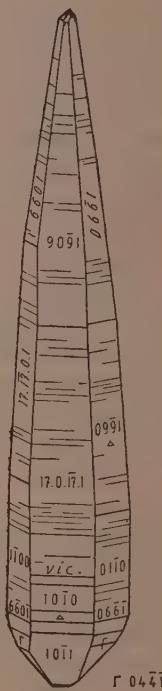


Fig. 3<sup>a</sup>.

Dalla parte acuminata, nella zona dei romboedri diretti, le facce di prisma son ben sviluppate e vanno restringendosi verso l'apice acuto del cristallo, dove, prima delle piccole facettine del romboedro fondamentale, si incontrano, in serie, alcuni netti e sottili romboedri acuti. Nella zona inversa, che si mantiene costantemente larga, le facce di prisma hanno invece sviluppo molto limitato, e tutta la zona è occupata da romboedri acutissimi, vicinali del prisma, difficilmente e non sicuramente definibili, perchè a causa della marcata striatura e di una loro frequente alternanza col prisma, danno serie di immagini vicinissime; solo verso l'apice, in

prossimità del romboedro fondamentale, sempre più sviluppato del corrispondente diretto, si trova anche qualche romboedro ottuso ben definito.

Nell'altra estremità le due zone, diretta ed inversa, sono invece ugualmente sviluppate, e l'abito del cristallo è quasi regolare, oppure leggermente affusolato per alcune faccettine di romboedro difficilmente definibili.

Ne risulta così un'abito caratteristico come può vedersi nei disegni della figura 1<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup>. Alcuni individui più ricchi di forme hanno invece l'abito rispecchiato dalla figura 2<sup>a</sup>. Spesso poi i cristalli sono anche un po' appiattiti e nella parte acuta terminano a punta di scalpello.

I geminati non sono frequenti; ma non mancano quelli di compenetrazione, secondo la legge abituale dei Quarzi alpini.

\* \* \*

Nella zona [010] dei *romboedri diretti*, ho quasi sempre trovato la forma {5053}, (comune ai quarzi di molte località del Canton Ticino), accompagnata qualche volta dalle {7076} {6065}<sup>(1)</sup>, o da queste sostituita; talvolta da {7074}, {11·0·11·5}<sup>(2)</sup>. Con più frequenza della {3031}, o in sostituzione di questa, con immagini nette, troviamo le forme {22·0·22·7}, {13·0·13·4}, {23·0·23·7}, {7·0·7·2}<sup>(3)</sup>, che rappresentano, nella zona diretta, un gruppo caratteristico di forme vicine, corrispondenti a quello stesso gruppo di uguali forme osservato nella zona inversa da A. Bianchi, tanto nei quarzi del Canton Ticino, quanto in quelli di Val Devero: sono così confermati come simboli per le forme del quarzo, le {13·0·13·4} e {22·0·22·7}<sup>(4)</sup>. Caratteristica pure di questa zona, poichè manca in generale nella zona inversa, è la {4041}, sempre ben individuata e perfettamente speculare. Ben definite e frequenti sono anche la forma {15·0·15·2}<sup>(5)</sup>, rara pel quarzo, e nota solo pei giacimenti della Carolina del Nord<sup>(6)</sup> e di Val

(1) 1011 : 7·0·7·6 = 40° 13 media di tre misure (calc. 4° 12'); 1011 : 6065 = 40° 50' due misure (calc. 4° 57').

(2) 1011 : 7·0·7·4 = 13° 52 - 14° 5' (calc. 13° 59'); 1011 : 11·0·11·5 = 18° 32 - 18° 32 - 18° 38 media 18° 34 (calc. 18° 31').

(3) 1011 : 22·0·22·7 = 24° 3' - 8' - 8' - 13' (calc. 24° 9'); 1011 : 13·0·13·4 = 24° 28' - 32' - 36' (calc. 24° 37'); 1011 : 23·0·23·7 = 24° 43 - 24° 47' (calc. 24° 44'); 1011 : 7·0·7·2 = 25° 31' - 32' - 31' - 31' (calc. 25° 32').

(4) Vedi A. BIANCHI, *Quarzo di Val Devero*. Nota 1<sup>a</sup> a p. 61 per quanto riguarda il simbolo 13·0·13·4, e p. 69.

(5) 1011 : 14·0·14·1 = 34° 56 - 59 - 59 - 35° 1 media 34° 59 (calc. 35°); 1011 : 12·0·12·1 = 34° 23' - 30' - 36' media 34° 29 (calc. 34° 28'); 1011 : 9·0·9·2 = 28° 6' - 12' - 15' - 20 (calc. 28° 17'); 1011 : 16·0·16·3 = 29° 50' - 50' - 51' - 53' - 53' (calc. 29° 49'); 1011 : 11·0·11·2 = 30° 4' - 6' - 10' (calc. 30° 4'); 1011 : 13·0·13·2 = 31° 7' - 14' - 23' (calc. 31° 18'); 1011 : 15·0·15·2 = 32° 16' media di 6 misure vicinissime (calc. 32° 13'); 1011 : 10·0·10·1 = 33° 45' media di 7 misure (calc. 33° 43).

(6) A. C. GILL, *Beiträge zur Kenntniss des Quarzes*. «Groth's Zeitschr.», XXI, 109.

Devero, e le forme  $\{60\bar{6}1\}$   $\{10\cdot0\cdot\bar{10}\cdot1\}$  <sup>(1)</sup>. Ma anche le  $\{9\cdot0\cdot\bar{9}\cdot2\}$ ,  $\{5\cdot0\cdot\bar{5}\cdot1\}$ ,  $\{16\cdot0\cdot\bar{16}\cdot3\}$ ,  $\{11\cdot0\cdot\bar{11}\cdot2\}$   $\{13\cdot0\cdot\bar{13}\cdot2\}$   $\{8\cdot0\cdot\bar{8}\cdot1\}$ ,  $\{9\cdot0\cdot\bar{9}\cdot1\}$ ,  $\{12\cdot0\cdot\bar{12}\cdot1\}$ ,  $\{14\cdot0\cdot\bar{14}\cdot1\}$  \* e  $\{17\cdot0\cdot\bar{17}\cdot1\}$ , furono osservate ripetutamente. La  $\{12\cdot0\cdot\bar{12}\cdot1\}$  fu trovata da Vom Rath nel quarzo della Carolina del Nord (Groth's Zeitschr. XII, 535). Ma l'autore nell'accennarne non riporta gli angoli; la  $\{14\cdot0\cdot\bar{14}\cdot1\}$  \* mi risulterebbe nuova <sup>(2)</sup>.

Altri romboedri che stanno in posizione intermedia tra quelli elencati, sono pure presenti, ma mi sembra opportuno, dato che si presentano solo incidentalmente, sebbene talora con immagine ottime, non farne particolare menzione. Così di altri romboedri più acuti non faccio cenno avendoli considerati forme vicinali del prisma. È frequente, tra questi, una forma a un grado circa dal prisma.

Nella zona  $[100]$ , dei *romboedri inversi*, le faccette delle forme  $\{0441\}$   $\{0661\}$   $\{0881\}$   $\{0\cdot10\cdot10\cdot1\}$   $\{0\cdot12\cdot\bar{12}\cdot1\}$  e  $\{0\cdot16\cdot\bar{16}\cdot1\}$  sono state trovate solo qualche volta, sempre però, in ogni caso, in modo da renderne sicura la presenza. Le forme invece  $\{0771\}$  e  $\{0991\}$  sono caratteristiche di questa zona, sia per la loro frequenza e nitidezza, sia perchè mancano le corrispondenti nella zona diretta.

Non riporto gli angoli delle forme comuni, e riporto solo in nota, per ragioni di spazio, quelli delle forme meno comuni.

Nella zona dei *trapezoedri diretti* con la  $\{51\bar{6}1\}$  e la piramide trigonale  $\{1121\}$  si accompagna sempre una faccettina sottile e netta del trapezoedro  $\{9\cdot2\cdot\bar{11}\cdot2\}$ . Le forme  $\{32\bar{5}3\}$ ,  $\{4373\}$ ,  $\{7\cdot5\cdot\bar{12}\cdot5\}$  <sup>(2)</sup>,  $\{3141\}$   $\{4151\}$  <sup>(3)</sup> furono incontrate solo qualche volta.

Più ricca di forme è la zona dei *trapezoedri inversi*. La piramide trigonale è sempre fortemente striata parallelamente all'asse di tale zona, e, con essa, si trovano talvolta faccettine vicinali, che presentano la stessa striatura, ciò che rende più facile e sicura la orientazione dei cristalli. Ho trovato più volte il trapezoedro che ha per simbolo  $\{19\cdot20\cdot\bar{39}\cdot19\}$  \*, nuovo pel quarzo. Per l'angolo  $10\bar{1}1$  :  $19\cdot20\cdot39\cdot19$  ho avuto quale media di cinque ottime letture, tra i limiti  $29^\circ 44'$  —  $29^\circ 54'$ , il valore  $29^\circ 50'$  (calc.  $29^\circ 51\frac{1}{2}'$ ); e per l'angolo  $01\bar{1}1$  :  $19\cdot20\cdot39\cdot19$  ho misurato il valore  $28^\circ 36'$  (calc.  $28^\circ 36\frac{1}{2}'$ ). Meno frequente è qualche altra forma vicina come  $\{14\cdot15\cdot\bar{29}\cdot14\}$ , osservata da A. Bianchi in Val Devero, e  $\{10\cdot11\cdot\bar{21}\cdot10\}$  \* non nota tra le forme del quarzo e ben determinata dagli angoli seguenti:  $10\bar{1}1 : 10\cdot11\cdot\bar{21}\cdot10 = 30^\circ 41' - 30^\circ 42' - 30^\circ 44'$  (calc.  $30^\circ 41'$ ),  $01\bar{1}1 : 10\cdot11\cdot\bar{21}\cdot10 =$

(1) Vedi nota 5 pagina precedente.

(2) Questa forma è stata trovata anche da Vom Rath in un cristallo di quarzo della Carolina del Nord, e può quindi ritenersi confermata. L'autore non riporta però i valori angolari che servirono a determinarla. Cfr. «Groth's Leitschr.», XII, 453.

(3)  $01\bar{1}1 : 32\bar{5}3 = 21^\circ 48'$  (calc.  $21^\circ 47'$ );  $01\bar{1}1 : 4373 = 34^\circ 25'$  (calc.  $34^\circ 18'$ );  $01\bar{1}1 : 7\cdot5\cdot\bar{12}\cdot5 = 35^\circ 18'$  calc.  $35^\circ 14'$ ;  $01\bar{1}1 : 3141 = 48^\circ 27'$  (calc.  $48^\circ 23'$ );  $01\bar{1}1 : 4151 = 52^\circ 25'$  (calc.  $52^\circ 17'$ ).

=  $28^\circ 21'$  —  $28^\circ 23'$  —  $28^\circ 24'$  (calc.  $28^\circ 23'$ ). Le forme  $\{4\cdot5\cdot\bar{9}\cdot4\}$ ,  $\{7\cdot9\cdot\bar{16}\cdot7\}$ ,  $\{3\cdot4\cdot7\cdot3\}^{(1)}$ ,  $\{5\cdot7\cdot12\cdot5\}$   $\{2\cdot3\cdot\bar{5}\cdot2\}$   $\{1\cdot2\cdot\bar{3}\cdot1\}$  e  $\{3\cdot8\cdot11\cdot3\}$  furono pure osservate su diversi cristalli, e determinate in modo sicuro in base a misure tutte buone e che riporto in seguito in una tavola.

In un solo cristallo, con faccettine nette e belle immagini, ho trovato anche le forme  $\{7\cdot15\cdot\bar{22}\cdot7\}$   $\{2\cdot11\cdot\bar{13}\cdot2\}^*$   $\{1671\}^{(2)}$ . La prima riconferma l'osservazione fatta da Artini nel quarzo di Val Malenco<sup>(3)</sup> e senza sufficienti motivi non accettata da Cathrein e Rossignoli; la seconda sarebbe nuova pel quarzo, mentre fu osservata la corrispondente diretta da A. Bianchi nel quarzo di Val Devero; e la terza fu osservata in modo non sicuro da Aminoff nel quarzo di Samarka (Urali)<sup>(4)</sup>, e può ritenersi, quindi, ora confermata.

Riassumendo le forme, in numero di 59, sono:

$\{10\bar{1}1\}$ ,  $\{10\bar{1}0\}$ ,  $\{7\cdot0\cdot\bar{7}\cdot6\}$ ,  $\{6\cdot0\cdot\bar{6}\cdot5\}$ ,  $\{5\cdot0\cdot\bar{5}\cdot3\}$   $\{7\cdot0\cdot\bar{7}\cdot4\}$ ,  $\{11\cdot0\cdot\bar{11}\cdot5\}$ ,  $\{3\cdot0\cdot\bar{3}\cdot1\}$   $\{20\cdot0\cdot20\cdot7\}$   $\{22\cdot0\cdot\bar{22}\cdot7\}$   $\{13\cdot0\cdot\bar{13}\cdot4\}$   $\{23\cdot0\cdot\bar{23}\cdot7\}$   $\{7\cdot0\cdot\bar{7}\cdot2\}$   $\{4\cdot0\cdot\bar{4}\cdot1\}$   $\{9\cdot0\cdot\bar{9}\cdot2\}$   $\{5\cdot0\cdot\bar{5}\cdot1\}$   $\{16\cdot0\cdot\bar{16}\cdot3\}$   $\{11\cdot0\cdot\bar{11}\cdot2\}$   $\{6\cdot0\cdot\bar{6}\cdot1\}$   $\{13\cdot0\cdot\bar{13}\cdot2\}$   $\{15\cdot0\cdot\bar{15}\cdot2\}$   $\{8\cdot0\cdot\bar{8}\cdot1\}$   $\{9\cdot0\cdot\bar{9}\cdot1\}$   $\{10\cdot0\cdot\bar{10}\cdot1\}$   $\{12\cdot0\cdot\bar{12}\cdot1\}$   $\{14\cdot0\cdot\bar{14}\cdot1\}^*$   $\{17\cdot0\cdot\bar{17}\cdot1\}$   $\{0\cdot11\cdot11\}$ ,  $\{0\cdot8\cdot\bar{8}\cdot3\}$ ,  $\{0\cdot4\cdot\bar{4}\cdot1\}$ ,  $\{0\cdot6\cdot\bar{6}\cdot1\}$ ,  $\{0\cdot7\cdot\bar{7}\cdot1\}$ ,  $\{0\cdot8\cdot\bar{8}\cdot1\}$   $\{0\cdot9\cdot\bar{9}\cdot1\}$ ,  $\{0\cdot10\cdot\bar{10}\cdot1\}$ ,  $\{0\cdot12\cdot\bar{12}\cdot1\}$   $\{0\cdot16\cdot\bar{16}\cdot1\}$ .

$\{3\cdot2\cdot\bar{5}\cdot3\}$   $\{11\bar{2}1\}$   $\{43\bar{7}3\}$   $\{7\cdot5\cdot\bar{12}\cdot5\}$   $\{3\cdot1\cdot\bar{4}\cdot1\}$   $\{4\cdot1\cdot\bar{5}\cdot1\}$   $\{9\cdot2\cdot\bar{11}\cdot2\}$   $\{5\cdot1\cdot\bar{6}\cdot1\}$   $\{19\cdot20\cdot39\cdot19\}^*$   $\{14\cdot15\cdot\bar{29}\cdot14\}$   $\{10\cdot11\cdot\bar{21}\cdot10\}$   $\{4\cdot5\cdot\bar{9}\cdot4\}$   $\{7\cdot9\cdot\bar{16}\cdot7\}$   $\{3\cdot4\cdot\bar{7}\cdot3\}$   $\{5\cdot7\cdot\bar{12}\cdot5\}$   $\{2\cdot3\cdot\bar{5}\cdot2\}$   $\{1\cdot2\cdot\bar{3}\cdot1\}$   $\{3\cdot8\cdot\bar{11}\cdot3\}$   $\{7\cdot15\cdot\bar{22}\cdot7\}$   $\{1\cdot5\cdot\bar{6}\cdot1\}$   $\{2\cdot11\cdot\bar{13}\cdot2\}^*$   $\{1\cdot6\cdot\bar{7}\cdot1\}$ .

Nel confronto dell'abito e delle forme di questo quarzo con l'abito e le forme dei cristalli di Val Leventina e di Val Devero, si osserva una notevole analogia; ma le caratteristiche della zona diretta e inversa degli uni corrispondono alle caratteristiche rispettivamente della zona inversa e diretta degli altri: come del resto negli stessi cristalli di Val Devero si nota fra quelli dell'Arbola e quelli degli altri giacimenti.

A conclusione può dirsi che anche questi cristalli della Val Maggia presentano un abito nettamente trigonale, acuto, analogo al *Tessinerhabitus*, ma con un caratteristico, singolare, pseudoemimorfismo, marcato rispetto all'asse principale.

(1) Notiamo la  $\{34\bar{7}3\}$  che fu osservata solo nei quarzi alpini di Val Malenco, Val Devero e Canton Ticino.

(2)  $10\bar{1}1 : 7\cdot15\cdot\bar{22}\cdot7 = 42^\circ 58'$  (calc.  $42^\circ 59$ );  $10\bar{1}1 : 2\cdot11\cdot\bar{13}\cdot2 = 55^\circ 55$  (calc.  $55^\circ 50$ );  $01\bar{1}1 : 2\cdot11\cdot\bar{13}\cdot2 = 31^\circ 40$  (calc.  $31^\circ 42$ ).

(3) Vedi E. ARTINI, *Quarzo di Val Malenco*. «Mem. R. Acc. Lincei», Roma, 1888 e vedi anche A. BIANCHI, *Il «Tessinerhabitus»*, ecc. «Rend. R. Acc. Lincei», 1923, XXXII, 246.

(4) G. AMINOFF, «Arkiv för Kemi, Min. Geol.», Bd. 7, n. 7.

È certo difficile rendersi ragione di questo tipico e così marcato emorfismo. Forse, poichè i cristalli ad entrambe le estremità si presentano ugualmente limpidi e sviluppati liberamente, si potrebbe pensare a una diversità di condizioni d'ambiente tale da aver determinato una diversa velocità di accrescimento nei due sensi dell'asse principale.

E un tal modo di vedere sarebbe confortato dalle esperienze dello Spezia<sup>(1)</sup> sulla cristallogenesi del quarzo. Infatti ricorderò che questi ottenne cristalli di quarzo molto allungati con prevalenza o esistenza di un solo romboedro fondamentale in una rapida cristallizzazione, e invece, cristalli corti con uguale sviluppo dei due romboedri in una lenta cristallizzazione.

Tavola riassuntiva di alcune misure angolari  
relative alla zona dei trapezoedri.

Angoli misurati	Limiti delle osservazioni		N. osserv.	Media delle osserv.	Valori calcolati
0111 : 9.2.11.2	53° 39'	53° 51'	14	53° 43'	53° 41 1/2
1011 : »	30° 38'		1	30° 38'	30° 42'
0111 : 5.6.1	54° 47'	54° 56'	16	54° 52'	54° 51'
1011 : 11.2.1	28° 43'	28° 56'	25	28° 53'	28° 54'
1011 : 14.15.29.14	30° 17'	30° 18'	2	30° 17'	30° 11'
0111 : »	28° 30'		1	28° 30'	28° 31'
1011 : 45.9.4	33° 1'	33° 4'	2	33° 3'	33° 5 1/2
0111 : »	27° 49'	27° 54'	2	27° 50'	27° 47'
1011 : 7.9.16.7	33° 21'	33° 58'	4	33° 35'	33° 38'
0111 : »	27° 40'	27° 47'	2	27° 43'	27° 42'
1011 : 34.7.3	34° 25'	34° 27'	2	34° 25'	34° 18'
» : 5.7.12.5	35° 5'	35° 35'	2	35° 20'	35° 14'
» : 23.5.2	36° 21'	36° 22'	2	36° 22	36° 31'
» : 12.3.1	41° 40'	41° 55'	2	41° 51'	41° 57'
» : 3.8.11.3	46° 13'	46° 48	3	46° 27'	46° 35

(1) G. SPEZIA, *Contribuzioni sperimentali alla cristallogenesi del quarzo*. « Atti della R. Acc. Sc. Torino », 1905-1906, XLI, 158.

**Mineralogia.** — *Una miscela di fusione per l'analisi isopicnometrica.* Nota dell'Ing. ENRICO CLERICI, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH<sup>(1)</sup>.

Anteriormente alle mie ricerche, il liquido ottenuto dal Retgers sciogliendo tetrabromuro di stagno in tribromuro di arsenico era, fra i vari liquidi proposti per la separazione meccanica dei minerali, quello che possedeva il più elevato peso specifico, cioè 3,73 alla temperatura di 15° C.

Per raggiungere pesi specifici maggiori bisognava ricorrere a prodotti o miscele di fusione e, per conseguenza, operare a temperature alquanto elevate. Tale è, ad esempio, la miscela di Bréon<sup>(2)</sup> formata da cloruro di zinco e cloruro di piombo in proporzioni varie, con peso specifico da 2,4 a 5.

Fusibili al disotto di 100° vi sono due miscele proposte dal Retgers<sup>(3)</sup>, una ai nitrati d'argento e di tallio con peso specifico 4,8 e l'altra ai nitrati mercuroso e di tallio, per la quale il Retgers così si espresse: «in questo liquido la magnetite galleggia sempre facilmente e la pirite sta sospesa, cosicchè il peso specifico in ogni caso ammonta a 5,0 (verosimilmente 5,2 fino a 5,3)». Effettivamente, però, resta alquanto al disotto di 5,3 perchè l'oligisto crist. dell'Elba non vi galleggia.

Per ampliare il campo di applicabilità dell'analisi isopicnometrica io proposi, oltre alle soluzioni acquose al formiato di tallio e al formiato-malonato di tallio con cui si realizzano pesi specifici superiori a tutti gli altri liquidi pesanti, una miscela fatta con formiato di tallio e fluoruro di tallio. Di questa miscela detti già qualche notizia<sup>(4)</sup>, ed accennai anche al peso specifico valutato mediante pezzetti di minerali immessivi per indicatori.

(1) Presentata nella seduta del 28 febbraio 1925.

(2) BRÉON R., *Séparation des minéraux microscopiques lourds*, Bull. Soc. min. de France, II, 1880.

(3) RETGERS J. W., *Versuche zur Darstellung neuer schwerer Flüssigkeiten zur Mineraltrennung. II-Die Niträte und Doppelnitrate der Schwermetalle als schwere Schmelzen*, N. Jahrb., II, 1896.

(4) *Ulteriori ricerche sui liquidi pesanti per la separazione dei minerali*, «Rendiconti R. Acc. Naz. Lincei», XXXI, 1922, p. 116.

Stimo non inutile rammentare (ved. *Preparazione di liquidi per la separazione dei minerali*, «Rend. R. Acc. Lincei», XVI, 1907, p. 187; *Sulla analisi isopicnometrica delle rocce*, Nuovi annali del Ministero per l'Agricoltura, I, 1921) che i vari sali di tallio occorrenti si possono ottenere facilmente, e nel modo più economico, facendo agire i corrispondenti acidi sul carbonato di tallio, il quale, a sua volta, è di facile preparazione tenendo bagnato all'aria il tallio metallico in trucioli. Dai residui e dalle acque di lavatura si ricupera il tallio in forma spugnosa e cristallina, bene adatta alla preparazione di nuovo carbonato, spostandolo mediante lamina di zinco.

Così facendo, a caldo invece che a temperatura ambiente, non si ha il valore preciso del peso specifico del liquido non conoscendosi la variazione di volume del minerale, dipendente dal coefficiente o dai coefficienti di dilatazione e dalla forma e orientazione del frammento, ma praticamente in una separazione di minerali non reca pregiudizio l'assumere come peso specifico del liquido quello che gli indicatori hanno a freddo.

Può occorrere, però, di conoscere con maggiore approssimazione il peso specifico della miscela alla temperatura alla quale si opera, e così pure in quali dosi siano da prendere i due componenti affinché la miscela abbia il desiderato peso specifico.

Per questa determinazione il metodo del picnometro, che a freddo è spedito ed esatto, mi è sembrato, in questo caso, alquanto malagevole nelle varie manipolazioni ed ho preferito servirmi di una bilancia di Westphal gentilmente messa a mia disposizione dal dott. C. Perrier, direttore del Laboratorio Chimico del R. Ufficio geologico.

Le cose erano così disposte: in un becher contenente glicerina, scaldato con fiammella, è immerso un altro becher con un secondo bagno di glicerina e in questo sta la provetta con la miscela al tallio. Con due agitatori si possono rimescolare i due bagni, un termometro indica la temperatura del secondo bagno, regolata a 110-115° C, ed altro termometro può inserirsi, quando si vuole, nella provetta. La bilancia è collocata lateralmente e protetta con cartoni. Una lamina di mica protegge la bocca della provetta ed è intagliata per dar libero passaggio al sottile filo di platino che, appeso al gancio della bilancia, sostiene l'immersorio.

In una prima serie di misure feci l'immersorio di vetro opportunamente zavorrato con mercurio: poi l'ho sostituito con altro di argento puro massiccio, necessariamente più piccolo per lasciare un margine ai pesi addizionali al principio della misura quando la provetta contiene soltanto formiato di tallio fuso.

Ad ogni aggiunta di quantità pesata di fluoruro di tallio, la miscela veniva ben rimescolata con agitatore d'argento, avendo prima sganciato dalla bilancia il filo dell'immersorio.

Quando all'immersorio proprio della bilancia, il cui peso sia  $P$ , che all'aria è in equilibrio senza pesi addizionali, si sostituisce altro immersorio di peso  $A$  col filo di sostegno di peso  $p$  e l'immersorio e parte del filo sono immersi nella miscela, si avrà per l'equilibrio, detta  $S$  la spinta del liquido ed  $a$  il peso addizionale effettivo:

$$P = A + p + a - S \quad \text{da cui} \quad S = A + p - P + a = VD$$

essendo  $V$  il volume del liquido spostato e  $D$  il suo peso specifico che si cerca:

$$D = \frac{A + p - P + a}{V}.$$

Poichè  $A$ ,  $p$ ,  $P$ ,  $V$  sono costanti, l'andamento del peso specifico della miscela in funzione dei pesi addizionali è rappresentabile con una retta e le esperienze lo hanno confermato.

Nella prima serie di misure, usando l'immersoio di vetro, il cui volume era circa il doppio di quello d'argento, a 100 grammi di formiato di tallio facevo aggiunte successive di fluoruro di tallio del peso di un grammo ciascuna. Nella serie coll'immersoio d'argento le aggiunte erano di 2 grammi ciascuna e le ripetei fino a saturazione.

Alla scelta dell'argento fui indotto, oltre che dalla sua inalterabilità nella miscela fusa, dalla possibilità di introdurre nel calcolo valori ben determinati per il peso specifico  $d$  e il coefficiente  $k$  di dilatazione cubica dell'argento, desumendoli dalle *Physikalisch-Chemische Tabellen* di Landolt Börnstein, Berlin 1905.

Se al volume dell'immersoio d'argento alla temperatura di 110° si aggiunge quello della frazione  $n$  del filo di platino immersa nella miscela, la espressione esatta del peso specifico della miscela sarà:

$$D = \frac{A + p - P + a}{\frac{A}{d}(1 + kt) + n \frac{p}{d'}(1 + k't)}.$$

Poichè:

$$\begin{array}{ll} A = 11,2906 & p = 0,0795 \\ P = 6,1374 & \\ k = 0,0000584 & k' = 0,0000265 \\ d = 10,52 & d' = 21,4 \\ n = 0,136 & \end{array}$$

risulta:

$$D = \frac{5,2327 + a}{1,0795 + 0,0005} = \frac{5,2327 + a}{1,08}$$

L'unito diagramma è costruito portando alle ascisse i grammi di fluoruro aggiunti ai 100 grammi di formiato, ed alle ordinate i rispettivi valori di  $a$  ai quali corrispondono i valori calcolati del peso specifico della miscela.

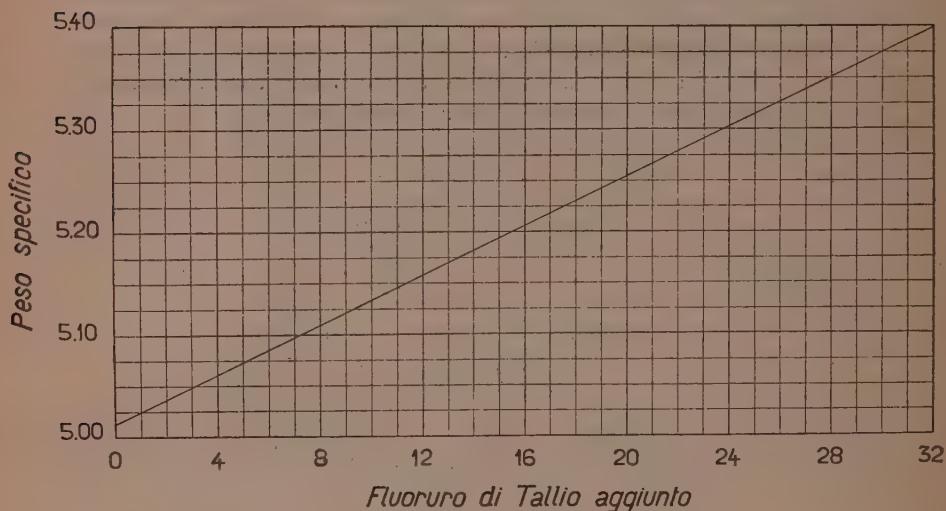
Da esso appare chiaramente come la miscela di Bréon e le due migliori miscele del Retgers siano, di non poco, superate.

Le miscele formiato-fluoruro di tallio sono dotate di una rimarchevole fluidità e filtrano rapide per carta.

Scelsi la temperatura di 110° per le misure onde essere sicuro della avvenuta soluzione del fluoruro, anche a dosi elevate, ed evitai temperature più alte, che forse avrebbero consentito di scioglierne maggiore quantità, perchè il liquido tende ad imbrunire e potrebbe alterarsi. Ma non è sempre

necessario operare a 110°. Così, per esempio, una delle miscele più ricche di fluoruro, filtrata, fonde completamente ed è ben fluida e perfettamente usabile in bagno di acqua bollente, perciò a 100°, col vantaggio di non dover vigilare il riscaldamento onde la temperatura della miscela resti costante.

Il peso specifico ne è 5,354 e, con una piccola aggiunta di fluoruro, essendo quasi satura, può essere portato a 5,38; mentre con piccole aggiunte di acqua può essere gradatamente abbassato. Al disotto del peso specifico 5 è preferibile usare o la soluzione di solo formiato oppure quella di formiato-malonato che, alla temperatura d'ambiente, sorpassa tutti i liquidi pesanti.



Perciò con i miei liquidi al tallio si possono fare separazioni di minerali a qualunque gradazione di peso specifico fra 1 e 5,40. A temperatura d'ambiente, per es. 20°, si giunge fino a 4,20, poi occorre elevare la temperatura per innalzare il punto di saturazione della soluzione. In seguito, operando a 100°, si possono conseguire, per fusione, gradazioni fino a 5,38 ed infine occorre operare a 110° soltanto per i pesi specifici fra 5,38 e 5,40.

**Zoologia.** — Contributo allo studio dello sviluppo post-embriionale degli « Scyllaridea » del Mediterraneo<sup>(1)</sup>. Nota del dott. RENATO SANTUCCI, presentata dal Socio B. GRASSI<sup>(2)</sup>.

### I. — PALINURUS VULGARIS Latr.

La incompleta conoscenza dello sviluppo post-embrionale del gruppo degli *Scyllaridea* mi ha spinto ad interessarmi di questo argomento.

Della famiglia dei *Palinuridae* conosciamo oggi, principalmente per opera di Claus<sup>(3)</sup>, Cunningham<sup>(4)</sup> e Bouvier<sup>(5)</sup>, quasi tutti gli stadi di sviluppo, poichè gli autori in parola studiarono e descrissero fillosomi di *Palinurus vulgaris*, viventi nel Mediterraneo e nel mare del Nord.

Nulla o ben poco invece è stato detto sullo sviluppo larvale della famiglia degli *Scyllaridae*; fu solo descritto qualche stadio (Claus<sup>(3)</sup>) come appartenente a *Palinurus vulgaris*, più tardi riconosciuto come di *Scyllarus arctus* (Dohrn<sup>(6)</sup>). Solo nel 1913 il Bouvier<sup>(7)</sup> trovò che i generi *Pseudibacus* e *Nisto*, descritti come due nuove forme, non sono altro che gli stadi nati rispettivamente di *Scyllarides latus* e *Scyllarus arctus*.

Oggetto di questa mia nota quindi è lo studio particolareggiato degli stadi larvali del *Palinurus vulgaris* vivente nel Mediterraneo. Mi riprometto in seguito di dedicare ulteriori note allo sviluppo larvale e post-larvale dei generi appartenenti alla famiglia degli *Scyllaridae*. Rimetto al lavoro definitivo la trattazione più ampia dell'ecologia e dello sviluppo post-embrionale degli *Scyllaridea*.

Il Cunningham<sup>(4)</sup> nel descrivere due fillosomi di *Palinurus vulgaris*, raccolti al faro di Eddystone, dà l'esatto disegno di essi e unisce al lavoro

(1) Dall'Istituto di Zoologia della R. Università di Genova.

(2) Presentata nella seduta del 28 Febbraio 1925.

(3) CLAUS C., Ueber einige Schizopoden und niedere Malacostraken Messinas. « Z. Wiss. Zool. », Bd. 13, p. 422 (*Phyllosoma*), 1863.

(4) CUNNINGHAM J. T., On the development of « *Palinurus vulgaris* » the Rock Lobster, or Sea Grayfish. « Jour. Mar. Biol. Ass. Plymouth », n. s., vol. 2, n. 2, p. 141-150, 1891.

(5) BOUVIER E. L., Recherches sur le développement post-embryonnaire de la langouste commune (*Palinurus vulgaris*). « Jour. Mar. Biol. Ass. Plymouth », vol. 10, n. 2, June 1914.

(6) DOHRN A., Untersuchungen über Bau und Entwicklung der Artropoden. VI Entwicklungsgeschichte der Panzer Krebse (Decapoda loricata). « Z. Wiss. Zool. », Bd. 20, 1870.

(7) BOUVIER E. L., Sur les genres « *Pseudibacus* » et « *Nisto* », et le stade natant des Crustacés décapodes macrures de la famille des Scyllaridés. « Comptes Rendus Ac. Sc. », T. 156, p. 1643, 1913, Paris.

una breve storia dello studio dei fillosomi dell'aragosta dal 1818 al 1891. Passa così in rassegna le descrizioni fatte da Couch, Gerstäker, Gerbe, Coste, Guérin-Méneville, Claus, Sp. Bate, Milne-Edwards, criticando laddove questi autori non sono fedeli nelle descrizioni o riferiscono qualche altra forma larvale ad un fillosoma di *Palinurus vulgaris*.

Il Bouvier portò un contributo fondamentale alla conoscenza degli stadi larvali in seguito a ricerche da lui compiute a Plymouth. Nel suo lavoro del 1914<sup>(1)</sup>, descrivendo per la prima volta lo stadio natante o *puerulus* di *Palinurus vulgaris*, da lui trovato, riassume con giusta critica la letteratura dello sviluppo larvale dei *Palinuridae*, dando poi una descrizione, molto succinta, degli stadi attraverso i quali passano le larve pelagiche prima di giungere alla forma di adulto perfetto.

Ho creduto utile di riprendere l'argomento, sia per confrontare lo sviluppo post-embrionale dell'aragosta del Mediterraneo con quello della nordica, sia per completare in alcuni punti le descrizioni del Bouvier, soprattutto per quanto si riferisce lo stadio VIII da lui non descritto.

Il materiale di cui fino ad oggi dispongo mi fu gentilmente favorito dal dott. B. Parisi del Museo Civico di Storia Naturale di Milano, il quale mi inviò numeroso materiale raccolto a Messina; dal dott. M. Sella, quello pesca nel 1924 a Gaeta e a Messina; dal prof. M. Fedele, quello raccolto dalla Stazione Zoologica di Napoli; dal dott. Richard del Museo Oceanografico, quello raccolto a Monaco nel 1909. Durante tutto l'anno 1924 furono eseguite apposite pesche nel golfo di Genova col R. Dragamine 18 e col R. Rimorchiatore 9 per cortese concessione dell'Istituto Idrografico della R. Marina.

Ad ogni descrizione di stadio ho fatto seguire alcune osservazioni di confronto con quelli precedentemente descritti, riferendomi in modo particolare all'ultimo lavoro del Bouvier<sup>(2)</sup>.

#### DESCRIZIONE DEGLI STADI LARVALI.

##### I. Stadio (mm. 2,9 - 3,9 circa)<sup>(2)</sup>.

Il corpo del fillosoma è appiattito e trasparente. Le antennule, più lunghe delle antenne, portano una setola internamente a circa metà della loro lun-

(1) Vedi nota 5 p. 333.

(2) Nel febbraio del 1924 in una femmina con uova trovai giovani fillosomi che misuravano da 2,4 a 2,7 mm. Non potendo escludere il dubbio di una schiusura anticipata, mi limito solo a darne i caratteri generali, ripromettendomi di parlarne ancora qualora mi si desse l'occasione di poter controllare in acquario la schiusa delle uova.

Il fillosoma presenta il corpo ancora raggrinzito. Le antennule e le antenne sono pressoché della stessa lunghezza, queste ultime sono però un po' più corte delle prime; le antennule portano al loro apice quattro brevi setole, le antenne solo due. Nei lunghi pedun-

ghezza. Le antenne presentano una piccola appendice basale esterna. Il cervello è raccolto verso l'apice dello scudo cefalico in due masse quasi triangolari. Le mascelle del 2º paio, alquanto allontanate dall'apparato masticatorio, hanno assunto la loro forma biloba caratteristica; la parte esterna più sviluppata della interna, porta un epipodite foliaceo triangolare, munito ai margini di numerose setole. I maxillipedi del 1º paio sono come piccole gemme appiattite e portano all'apice una breve setola. Lo scudo cefalico ricopre appena la base del 3º paio di maxillipedi. L'exopodite del 3º paio di pereiopodi consta di due articoli, l'apicale dei quali presenta un'ulteriore segmentazione senza però essere ancora rivestito di setole. I pereiopodi del 4º e 5º paio si presentano come piccole gemme appiattite. La segmentazione dell'addome è ancora indecisa nei fillosomi di questo stadio che misurano circa mm. 2,9, mentre va man mano accentuandosi negli esemplari di circa 3,9 mm.; in questi ultimi trovansi anche i pleopodi come piccole gemme appiattite. Gli abbozzi degli uropodi sono ben distinti.

*Osservazione:* I giovani fillosomi descritti da Claus<sup>(1)</sup> come appartenenti a *Palinurus vulgaris*, sono i primi stadi larvali di *Scyllarus arctus* (Dohrn)<sup>(2)</sup>.

I caratteri di questo stadio corrispondono a quelli dati dal Cunningham<sup>(3)</sup> nella descrizione del primo fillosoma e a quelli del I stadio di Bouvier, senonchè né l'uno né l'altro fanno menzione dell'inizio della segmentazione dell'addome e della presenza dei pleopodi. Il Cunningham trova nel suo fillosoma che i maxillipedi del 2º paio hanno sei articoli.

coli oculari, leggermente conici, distinguensi bene i gangli ottici e nella parte apicale il corpo pigmentato con i coni cristallini. All'inserzione dei peduncoli oculari trovasi l'occhio di *Nauplius*. Lo scudo cefalico porta già le numerose ramificazioni epatiche e del canale digerente. L'apparato masticatorio è composto di un labbro superiore ed uno inferiore, profondamente bifido; di un paio di robuste mandibole con margine interno denticolato; del 1º paio di mascelle a due rami corti e tozzi, terminanti con setole ed aventi palpo esterno; del 2º paio di mascelle, un po' eccentriche, foliacee e bilobe, non ancora ben definite nella forma. A queste parti fanno seguito le tre paia di maxillipedi: il 1º paio sotto forma di piccole gemme appiattite; il 2º paio a cinque articoli; il 3º paio a sei articoli, ha l'exopodite all'estremo del 2º articolo, rivestito di setole nella parte apicale. Lo scudo cefalico ricopre solo il 2º paio di maxillipedi. I pereiopodi, in numero di tre paia, sono formati di sei articoli e presentano l'exopodite di due articoli all'estremo del secondo articolo; solo l'exopodite del 1º e 2º paio di pereiopodi è provvisto di setole. Queste tre paia di pereiopodi sono provviste al loro apice di un breve e robusto articolo a forma di uncino. I pereiopodi del 4º e 5º paio non esistono ancora se non sotto forma di lievi gemme. Tanto i maxillipedi quanto i pereiopodi sono inseriti sul torace, il quale è più lungo che largo e, nella parte anteriore, è ricoperto dorsalmente dallo scudo cefalico. L'addome corto e stretto, più breve del torace, è privo di appendici all'infuori del telson e degli uropodi appena abbozzati; esso non presenta ancora alcuna segmentazione.

(1) Vedi nota 3 a p. 333.

(2) Vedi nota 6 a p. 333.

(3) Vedi nota 4 a p. 333.

*II Stadio* (mm. 4 - 5 circa).

Una breve gemma, munita di setola, sorge internamente a circa metà lunghezza delle antennule. Le antenne sono poco più corte delle antennule. I peduncoli oculari constano di due articoli: il prossimale cilindrico, il distale conico. I maxillipedi del 1° paio presentano una gemma exopodiale. I maxillipedi del 2° paio accennano alla suddivisione del secondo articolo e presentano una breve gemma exopodiale. I pereiopodi del 3° paio hanno l'exopodite rivestito di setole nelle parte apicale. Gli uropodi presentano un accenno di biforcazione.

*Osservazione:* Il Bouvier dà molto succintamente i caratteri dei fillosomi appartenenti a questo stadio; egli trova che l'exopodite dei pereiopodi del 3° paio è rivestito di setole solo nei fillosomi del III Stadio.

*III Stadio* (mm. 5,1 - 6 circa).

Le antennule e le antenne sono presso a poco della stessa lunghezza. Le mandibole, più sviluppate che nel II Stadio, hanno lunghi e robusti palpi. I pereiopodi del 4° e 5° paio sono più sviluppati, piatti e rivolti all'indietro; il 4° paio, formato di due articoli, presenta un breve exopodite. I segmenti dell'addome, ora ben distinti, portano i pleopodi molto più sviluppati che nello stadio precedente. Gli uropodi hanno nettamente iniziata la biforcazione. Lo scudo céfalico ricopre ora del tutto i maxillipedi del 3° paio.

*Osservazione:* I caratteri da me dati per questo stadio corrispondono solo in parte a quelli dati dal Bouvier, poichè egli comprende nel III stadio fillosomi di maggiori dimensioni.

*IV Stadio* (mm. 6,1 - 7 circa).

Le antennule hanno due articoli basali. Le antenne hanno un articolo basale lungo; esse sono più lunghe delle antennule. L'exopodite del 1° paio di maxillipedi è più sviluppato dell'endopodite stesso. I pereiopodi del 4° paio hanno tre articoli e, in posizione di riposo, sorpassano in lunghezza la metà dell'addome. I pleopodi hanno iniziato la loro biforcazione. Gli uropodi, già biforcati per metà, raggiungono in lunghezza la metà del telson. Il telson ha l'apice arrotondato e provvisto ai lati di due brevi ciuffi di setole.

*Osservazione:* Il Cunningham<sup>(1)</sup> figura e descrive un fillosoma di mm. 7. Questo stadio corrisponde ancora in parte al III stadio in Bouvier.

*V Stadio* (mm. 7,1 - 9 circa).

Le antennule presentano tre articoli basali; il loro flagello interno ha lunghezza pari ad un terzo di quello esterno. Anche le antenne hanno tre

(1) Vedi nota 4 a p. 333.

articoli basali. L'epipodite del 2° paio di mascelle è molto sviluppato. L'exopodite del 1° paio di maxillipedi è molto più sviluppato che nello stadio precedente. L'exopodite del 4° paio di pereiopodi presenta all'apice qualche setola. I pereiopodi del 5° paio sono formati di due articoli. L'addome ha i segmenti ben distinti specialmente nelle regioni epimerali. I pleopodi, sviluppati e completamente biforcati, sono portati da un breve peduncolo ancora inarticolato ed hanno l'endopodite più sviluppato dell'exopodite. Gli uropodi raggiungono quasi l'apice del telson.

*Osservazione:* I caratteri di questo stadio corrispondono a quelli del IV o V stadio di Bouvier.

*VI Stadio (mm. 9,1 - 12 circa).*

Le antennule e le antenne hanno forma cilindrica. Il flagello interno delle antennule ha lunghezza pari alla metà del flagello esterno. La lunghezza dell'exopodite del 2° paio di maxillipedi sorpassa il mezzo millimetro. Anche il 4° e il 5° paio di pereiopodi hanno forma cilindrica come il 1°, il 2° e 3° paio e terminano con una breve spina; il 4° paio, in posizione di riposo, è lungo quasi quanto l'intero addome; il 5° paio è formato di tre articoli. Gli uropodi, molto più sviluppati che nello stadio precedente, sorpassano in lunghezza l'apice del telson.

*Osservazione:* I caratteri di questo stadio corrispondono a quelli del VI stadio di Bouvier.

*VII Stadio: (mm. 12,1 - 16 circa).*

Il flagello interno delle antennule è già più lungo che nello stadio precedente. Il flagello delle antenne è più lungo dei tre articoli basali presi insieme. La parte prossimale e cilindrica dei peduncoli oculari è più lunga della parte distale e conica. La ghiandola antennale è quasi completamente sviluppata. L'exopodite del 2° paio di maxillipedi è più lungo del secondo articolo endopodiale ed all'apice è rivestito di setole. I pereiopodi del 4° paio hanno cinque articoli; il loro exopodite ha due articoli di cui il terminale, finemente segmentato, è provvisto di setole. I pereiopodi del 5° paio hanno quattro articoli e in posizione di riposo raggiungono la base degli uropodi. L'addome, definitivamente ben segmentato, ha gli epimeri arrotondati. I pleopodi hanno un breve peduncolo articolato. Gli uropodi, come il telson, hanno maggiore consistenza alla base che all'apice; essi sono articolati alla base e presentano un aculeo sul margine laterale esterno.

*Osservazione:* Claus<sup>(1)</sup> dà la descrizione ed il disegno di un fillosoma di mm. 14 i cui caratteri corrispondono a quelli del VII stadio di Bouvier. Quest'ultimo però non dice che in questi fillosomi l'expodite del 2° paio di maxillipedi è rivestito di setole all'apice; anzi nel IX stadio dice esplicitamente che esso ne è provvisto.

*VIII Stadio* (mm. 16,1 - 20 circa).

Il flagello interno delle antennule ha lunghezza pari a  $\frac{2}{3}$  del flagello esterno. Il flagello antennale è lungo il doppio degli articoli basali presi insieme, con i quali raggiunge quasi la totale lunghezza dello scudo cefalico. L'occhio di *Nauplius* incomincia la sua riduzione. L'exopodite del 2º paio di maxillipedi è lungo quasi quanto l'endopodite e porta setole nella sua parte apicale. I pereiopodi del 4º paio, a sei articoli, presentano l'exopodite rivestito di setole nell'articolo apicale. I pereiopodi del 5º paio, a cinque articoli, in posizione di riposo, sorpassano di poco la base del telson. I pleopodi sono peduncolati ed articolati; sul margine esterno dell'endopodite si osserva una breve appendice. Gli uropodi sono più lunghi del telson e provvisti di setole lungo il margine apicale arrotondato. Il 2º e 3º paio di maxillipedi, il 1º, 2º e 3º paio di pereiopodi presentano ciascuno due appendici branchiali: il 4º paio invece una sola.

*Osservazione:* Questo stadio non era stato descritto fino ad oggi; il Bouvier non avendolo potuto ottenere lo pone nella serie senza darne i caratteri.

*IX Stadio*: (mm. 20,1 - 22 circa).

Le antennule hanno il flagello interno lungo quasi quanto quello esterno. Le antenne, con gli articoli basali, molto robusti, sono più lunghe dello scudo cefalico. L'occhio di *Nauplius* in questo stadio è molto ridotto; delle due masse pigmentate, triangolari di cui era composto, rimane ora una sola masserella oscura. L'exopodite del 2º paio di maxillipedi è lungo quanto l'endopodite. I pereiopodi del 4º paio, in posizione di riposo, son lunghi quanto il telson. I pereiopodi del 5º paio, a sei articoli, sorpassano in lunghezza di poco la base del telson e presentano una brevissima gemma exopodiale al termine del secondo articolo. Gli epimeri addominali terminano a punta ottusa. Lo scudo cefalico ricopre il 1º paio di pereiopodi.

*Osservazione:* Claus descrive e figura un fillosoma di mm. 21, che corrisponde al IX stadio di Bouvier, il quale include in questo stadio fillosomi della lunghezza di mm. 21.

Dalla presente descrizione riassumendo potremo dire quindi in linea generale che gli stadi larvali descritti dal Bouvier per il *Palinurus vulgaris* del mare del Nord corrispondono a quelli dell'aragosta del Mediterraneo.

**Embriologia.** — *La prima formazione del pettine (Pecten) nello sviluppo dell'occhio di « Gallus domesticus ».* Nota del dott. P. PASQUINI<sup>(1)</sup> pres. dal Corrisp. F. RAFFAELE<sup>(2)</sup>.

Lo studio del come si origini questo particolare organo del fondo dell'occhio degli uccelli è stato argomento di lavoro di numerosi ricercatori; purtuttavia la disparità delle conclusioni cui essi sono giunti, non ha permesso ancora, in modo preciso, di conoscere se il pettine rappresenti una formazione ectodermica o mesodermica solamente, oppure un derivato dal concorso di ambedue i foglietti embrionali, in tempi diversi; infine se esso, che si costituisce in intimo nesso con la fenditura del calice ottico, sia in rapporto con la coroide. È altresì oggetto di discussione la funzione non ancora ben conosciuta di questo organo, di cui per ora mi limito ad esporre, molto succintamente, i punti principali rilevati nello studio della sua origine e successiva evoluzione. In *Gallus*, negli adulti, il pettine, come lamina frastagliata occupa il settore meridionale del bulbo ottico, impiantato com'è sul fondo di questo.

Tralasciando per ora l'esposizione della ricca letteratura passata particolarmente relativa a questo argomento, come i lavori sul corpo vitreo e sulle strutture associate alla fessura coroidea, ricorderò qui solamente quei reperti dei varî AA. che segnano i contributi più salienti alla conoscenza dello sviluppo di quest'organo, e che ci colpiscono per essere così disparati.

Mihalkowics<sup>(3)</sup> fu uno dei primi osservatori che parlò precisamente di uno zaffo di cellule mesodermiche che, penetrando all'altezza del nervo ottico, lungo la fessura coroidea, avrebbe fornito la prima base per la costituzione del pettine. In questa guisa le descrizioni che danno Forster (1876), Balfour (1885) e Leuckart (1876).

Kessler<sup>(4)</sup> e con esso Husche (1827) e Schoeler (1848), considera il pettine come formazione coroidea e quindi derivato dal foglietto embrionale medio per la sua costituzione prettamente vascolare, simile a quella della tunica vasculosa oculi. Parreidt<sup>(5)</sup> in *Eudyptes*, ha comparato il modo di origine del pettine osservato in questo pinguino, con i reperti ricavati dal-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della Regia Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 28 febbraio 1925.

(3) « Arch. Mikr. Anat. », Bd. 8, (1875).

(4) *Zur Entwicklung des Auges der Wierbeltiere*, Leipzig (1887).

(5) *Beiträge zur Anatomie des Auges bei Eudyptes Chrisocome und zur Entwicklung des Pektens im Vögelauge*. Inaug. Disser. Leipzig, Aug. Pries (1901).

l'esame di embrioni di pollo e ne ha dedotto che il pettine è formazione retinica per proliferazione dei labbri del peduncolo del nervo ottico.

Berndt<sup>(1)</sup> seguitando i lavori di Nussbaum (1899-1901), pur non giungendo a conclusioni precise, propende per l'origine ectodermica del pettine (*Fächer* = ventaglio) nello sviluppo dell'occhio del pollo.

Franz<sup>(2)</sup> è favorevole all'idea che il pettine non sia un derivato dalla coroide, ma rappresenti tessuto nervoso di origine retinica e perciò derivato dal nervo ottico. V. Husen<sup>(3)</sup> parla anch'egli di una crescita dei margini della fessura del calice ottico, nella quale vede principalmente la prima causa della formazione del pecten.

Slonaker<sup>(4)</sup>, nell'occhio del passero, vede svilupparsi l'abbozzo del pettine da un gruppo di cellule mesodermiche che penetra nel bulbo per la fessura coroidea al settimo giorno. A queste cellule che portano con sè vasi sanguigni, si unirebbero cellule indifferenziate della coroide. La retina non prenderebbe, perciò, alcuna parte a questa formazione che, come zaffio essenzialmente mesodermico, trascina con sè la membrana ialoide che nell'occhio dell'adulto viene ad avvolgere tutto il pettine.

Lindal e Jokl<sup>(5)</sup> in *Podiceps*, *Anas*, *Passer* e *Gallus*, stabiliscono le modalità di chiusura della fessura del calice ottico, e vengono a determinare come prima base del pettine, la regione cellulare della retina embrionale prossima alla fessura, in corrispondenza al peduncolo ottico. Questo ammasso di cellule, corrispondenti a cellule di glia, sono il primo abbozzo di quanto chiamano *neuropecten*.

Mann<sup>(6)</sup> recentemente afferma che « The pecten is developed from ectoderm derived from the inner layer of the optic cup, secondarily vascularized by mesoderm ».

Tralasciando per ora di descrivere minutamente gli stadi di cui mi sono servito per le mie ricerche iniziate nell'ottobre 1923<sup>(7)</sup>, riassumo brevemente alcuni risultati cui sono pervenuto :

Negli embrioni di pollo, il pettine appare come formazione precoce, dopo 94 ora d'incubazione, ed il suo abbozzo si presenta come uno zaffo di

(1) *Die Entwick. des Pecten im Auge des Huhnchens aus den Blättern der Augenblase*. Inaug. Diss. Bonn (1905).

(2) « Biolog. Zentralbl. », Bd. XXVIII, (1908).

(3) *Zur Kenntnis des Pectens in Vögelaugen*. « Zool. Jahrb. abt. f. Anat. », 36, (1913).

(4) « Journal of Morphology », Vol. 35, (1921).

(5) « Zeitsch. für Anat. u. Entwickl. », Bd. 63, Heft 3/4 (1922).

(6) « Quart. Journ. of Micr. Science », Vol. 68, III (1924).

(7) Ho cercato che il materiale fosse il più abbondante possibile, per ottenere numerose serie di embrioni in stadi serrati (numero degli stadi 35-40) Gli embrioni, avuti da uova gallate di pollo, incubate con termostato a 39° cca. costanti, furono fissati in sublimato-alcoolico acetico, in liquido di Pereney (specialmente gli avanzati), ma la massima parte in miscela di Tellyeniczky. Su sezioni di 10 μ e di 5 μ nella regione interessante l'organo in esame, colorai con le ematossiline Delafield, Erlich, emallume oppure in *toto* con carmalumme.

cellule mesodermiche che penetra nella cavità del vitreo, attraverso la fenditura coroidea lungo la cui base scorrono piccoli vasi sanguigni che, limitati dalle suddette cellule mesenchimali, costituiscono con esse questo piccolo pettine primitivo. Esso che potrebbe denominarsi ora: « pecten originario », sporge nel calice ottico un poco obliquamente, come lamina spessa a sezione triangolare, con larga base ed un'altezza di ca.  $96 \mu$ , contigua con la retina che ai suoi lati presenta due creste salienti (vedi figura).

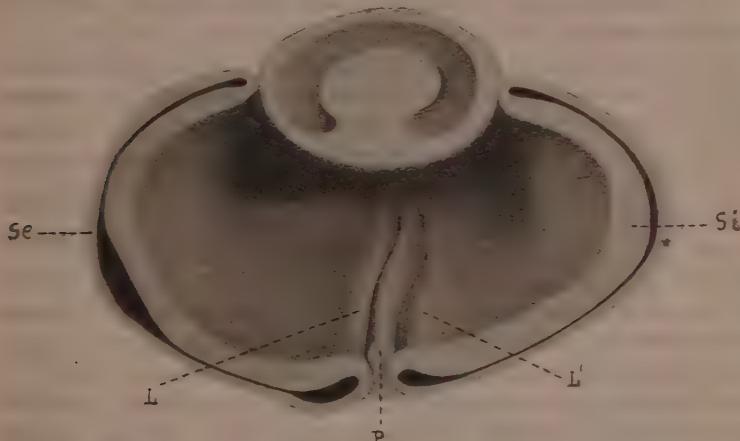


Figura: Modello di ricostruzione dell'occhio di Gallus, di sezione di embrione di 9<sub>4</sub> h. trasversali rispetto alla fessura del calice ottico; X 143:

Se, strato esterno della retina; Si, strato interno; P, abbozzo del pettine (pecten originario); L e L', labbi della fessura coroidea.

Alla formazione del « pecten definitivo », partecipa in un secondo tempo anche la retina; ciò avviene però più tardi e precisamente allorché il suo foglietto parietale è andato quasi completamente pigmentandosi. Difatti in stadi di 113-116 h., allorché si è già iniziata la chiusura della fessura coroidea, ora nella regione prossima all'inserzione del nervo ottico, quindi in quella distale, i limiti interni della fessura si vengono a spostare e ciò per il sollevarsi, con la proliferazione delle cellule, dei suoi labbi verso l'interno. Ne risulta che il pettine originario viene ad essere coperto gradualmente dalla parete del calice ottico che va accollandosi viepiù ad esso e mentre già all'inserzione del nervo, il pettine ha raggiunto la costituzione definitiva, nella regione distale permane quella caratteristica iniziale.

In embrioni più avanzati, la continuità della retina nel pettine è nettissima, mentre all'inizio della formazione i rapporti erano di sola contiguità. Il ripiegamento, verso l'interno, dei labbi della regione distale della fessura, è molto più accentuato che in quella prossimale al nervo ottico in vicinanza del quale tale ripiegamento è simmetrico in tutti e due i lati degli orli della fenditura rispetto allo zaffo mesodermico del pettine originario. Distal-

mente, detto ripiegamento è asimmetrico: in particolare il labbro nasale: acuto, stretto e obliquo, il temporale: largo ed ottuso, da ciò derivandone infine la posizione obliqua normale del pecten definitivo. Concordano in ciò i miei reperti con quelli di Lindal e Yokl ad eccezione di quel che riguarda alcune modalità di chiusura della fenditura, i di cui margini essi vedono accollarsi in due separate zone, anzichè nella maniera da me descritta.

È necessario soffermarsi, a questo punto, sul diverso comportamento delle cellule retiniche, che, mentre nello strato interno seguono quel normale differenziamento che le condurrà allo stato definitivo ed in quello esterno, appiattendosi, si caricano di pigmento per dare lo strato pigmentato, nella regione che interessa i margini della fenditura si mantengono invece inalterate. Qui i due foglietti retinici, passano, mutando di spessore, l'uno nell'altro di cui l'esterno assai più esile e non pigmentato; sono queste cellule appunto che concorrono nel modo sopra descritto al completamento della costituzione ed alla formazione del pettine definitivo.

Con l'originarsi successivo delle fibrille nervose (embr. di 144 h.), che dal foglietto interno della retina, che va costituendosi in strati, penetrano nel nervo ottico, il pettine cuneiforme viene ad essere separato dalla retina da dette fibre e solo nella regione pupillare della fessura, permane la caratteristica continuità con la retina. In questo stadio che segna il differenziamento progressivo dei neuroblasti retinici (sono già palesi gli abbozzi della membrana nittitante e della sclera), il pettine al suo principio sul nervo ottico, misura alla base 168  $\mu$  di spessore ed un'altezza dal suo vaso basale di 200  $\mu$ . La successiva evoluzione di esso si manifesta con una diminuzione di spessore nella sua base (140  $\mu$  in embrioni di 171 h.), e la crescita, sempre però più accentuata distalmente al nervo, in altezza: il suo corpo diviene sempre più laminare e sporgente nel corpo vitreo mentre a questo punto compaiono in esso i primi granuli di pigmento che rappresentano il principio della definitiva pigmentazione. La regione del pettine che per ultima si definisce come tale, è quella che interessa la zona ciliare della retina dove cioè la fessura non è intieramente chiusa. Qui infatti le due pareti cellulari, continuazioni del foglietto interno retinico, e costituenti il pettine, sono separate da abbondante mesenchima riccamente vascolarizzato e dalle stesse cellule della coroide.

La forma ora assunta dal pettine è di una lamina, a sezione triangolare all'inserzione del nervo, presso a poco trapezoidale le cui dimensioni verticali, rispetto al nervo ottico, crescono gradatamente a partire da questo verso la zona ciliare del fondo dell'occhio.

In stadi di 200 h. cca., si manifesta in questa lamina una prima ondulazione longitudinale cui se ne aggiungono presto delle altre. In stadi più avanzati compaiono i frastagliamenti trasversali, ma di questi e delle altre modalità di sviluppo che riguardano la crescita del pettine, la sua vascolarizzazione e lo stabilirsi della sua definitiva costituzione morfologica, tratterò in un'altra mia nota.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il socio Q. MAJORANA nella seduta del 28 febbraio decorso, lesse la seguente Commemorazione del Socio Corrisp. PIETRO CARDANI:

Pietro Cardani nacque a Padova il 21 ottobre 1858 e morì a Parma il 4 dicembre 1924, pieno ancora di entusiasmo per la ricerca fisica sperimentale, immaturamente rapito all'affetto dei Suoi e alla stima dei Colleghi ed Allievi.

Compì i primi studii a Padova, per conseguire poi la laurea in fisica a Palermo nel 1881. Ebbe a maestro il Pisati, sin da quando egli, ancora studente liceale, ne frequentava il gabinetto nella maggiore Università Sicula. Oltre che del Pisati, il Cardani fu assistente del Roiti, del Righi e continuò poi a frequentare l'Istituto fisico che da questi sommi era stato allora successivamente diretto e che passò poi alla dipendenza del Macaluso.

Entrò per concorso nell'insegnamento secondario a Roma nel 1887 e vi rimase, salvo breve interruzione per trasferimento a Napoli, sino al 1893, nel quale anno fu nominato straordinario nella Università di Parma. Qui rimase poi per tutta la vita dopo avere avuto, per compiuto triennio, la promozione ad ordinario. La sua produzione scientifica di cui dirò appresso, gli fruttò uno dei premii ministeriali di questa Accademia, che lo volle suo corrispondente nel 1908.

Il Cardani fu uomo di attività multiformi e rimarchevoli. Studioso per sua indole (e me lo ricordo quando io studente e lui già docente, frequentava con me le lezioni del Beltrami), ebbe sempre grande trasporto per le ricerche sperimentali, ancor quando queste fossero volte a problemi di semplice misura. Ma in ogni caso, come rilevarono Blaserna, Ciamician, Righi e Roiti, dimostrò sempre di possedere abilità sperimentale assai notevole ed acutezza non comune, nella critica dei lavori aventi attinenza con le ricerche da Lui intraprese. Ottimo insegnante, le sue lezioni sono ricordate dai suoi allievi con compiacimento, per chiarezza ed ordine di esposizione, per le numerose dimostrazioni sperimentali preparate con rara abilità. La Sua attività scientifica fu interrotta per più anni dalle cure della vita politica; poi, da volontario di guerra al fronte, fece studii fonotelemetrici insieme col Garbasso. Altre benemerenze nella vita pubblica aveva prima conseguito nelle epidemie coleriche di Palermo del 1885 e 1887, e in occasione del terremoto calabro-siculo del 1908. Fu uomo di cuore e di mente elevata; di tratto affabile, conquistava facilmente la stima e l'amicizia di quanti lo conobbero.

La produzione scientifica del Cardani si svolse in campi svariati della fisica. Peraltro, egli principalmente si occupò di questioni attinenti le molteplici manifestazioni delle scariche elettriche a traverso i gas od altri conduttori. Egli, nel consacrare molta parte del suo tempo a tale studio, dovette in parte ispirarsi ai lavori del Righi, di cui fu grande estimatore ed amico, essendone già stato assistente a Palermo ed avendo in seguito con Lui frequenti occasioni di incontro per la vicinanza di Parma a Bologna. Sono note le difficoltà in cui si imbatte chi voglia stabilire leggi rigorose del fenomeno in parola; quantunque le più moderne teorie fisiche abbiano gettato viva luce sulla sua essenza, molti lati di esso rimangono oscuri; la molteplicità dei fatti connessi, constatabili con mezzi svariatissimi, lo fa sfuggire sovente ad una rigorosa trattazione teorica e sperimentale; talchè il fisico deve spesse volte accontentarsi di una descrizione sommaria di quanto egli osserva. Ciò malgrado il Cardani, senza assurgere ad alte disquisizioni e ad ipotesi più o meno gratuite, ma servendosi di solito di quelle già da altri avanzate, ha saputo in più casi fornire dei dati veramente utili per chi si pone allo studio di simile argomento. Così dicasì delle ricerche *sulla durata delle scariche, sulle distanze esplosive, sull'influenza del riscaldamento del gas ambiente, sulla suddivisione delle scariche nei circuiti derivati, sul passaggio delle scariche negli elettroliti.*

Un gruppo di lavori riguarda inoltre il passaggio della scarica attraverso conduttori metallici; in esso il Cardani verifica formule già note e concilia qualche divergenza circa l'applicazione di queste a conduttori sottili o grossi. Egli si interessa poi al problema della temperatura raggiunta dai conduttori pel passaggio di correnti elettriche, ed anche qui dà utili indicazioni concernenti le applicazioni tecniche.

In periodo più recente il Cardani si è occupato di studii riguardanti i raggi X e la ionizzazione dei gas, mettendo in relazione questi fatti con l'energia disponibile nei tubi Roentgen. Più interessante è forse (anche per il suo carattere di originalità) il risultato secondo cui l'anidride carbonica renderebbe più stabile il funzionamento di quei tubi; ed esso meriterebbe di attirare l'attenzione di ulteriori sperimentatori.

Come esperienza da scuola è infine notevole il metodo del Cardani per l'osservazione dell'effetto fotoelettrico, basato su di una felice applicazione dell'elettroforo di Volta.

In altri campi della fisica, e tacendo di altre ricerche minori, rilevo come il Cardani, in collaborazione col Dott. Tomasinì, potè compiere un'interessante ricerca sul calore specifico dell'acqua sopraffusa; essa va segnalata sia per l'eleganza del metodo, sia per i risultati numerici.

Va inoltre ricordato il lavoro del Cardani sulla determinazione diretta del coefficiente di Poisson, fatta con precisione superiore a quella comunemente ottenuta dagli altri sperimentatori e con metodo del tutto originale.

\* \*

In tutti questi lavori, di cui il Cardani dà conto in una cinquantina di Note e Memorie, se Egli non si preoccupa sempre dell'originalità del metodo adottato, dà costantemente prova di vera serietà scientifica, e minuziosa scrupolosità nel prevedere, studiare, ed eliminare, se del caso, le cause capaci di falsare i risultati. Egli non ha mai annunziato risultati sensazionali: entusiasta della ricerca sperimentale e dell'esperimento fisico, il suo spirito si appagava frequentemente della constatazione di cose già da altri intraviste o studiate, cercando di apportare ad esse qualche personale contributo, destinato sempre o a chiarire alcuni lati della questione o ad accrescerne la precisione delle determinazioni numeriche. E tal linea di condotta è stata da Lui sempre seguita sino alla morte.

Va additata dunque ad esempio la figura del Cardani ai fisici del nostro paese. Lavorare bisogna, e produrre; e non si deve affrontare la ricerca sperimentale sol se questa prometta grandi ed impressionanti scoperte. Appunto perchè siamo in un periodo di piena evoluzione scientifica, temo che si diffonda tra i cultori della fisica sperimentale un malcelato desiderio della trovata nuova e dell'ipotesi ardita. Purtroppo l'esempio ci viene dall'estero; ma là è innegabile che i successi in tale via non sono mancati, forse in conseguenza del gran numero di cultori e dei grandiosi mezzi di cui noi facciamo difetto. Ma non si deve dimenticare che il più sicuro progresso nello studio delle leggi naturali non può realizzarsi senza che si proceda anzitutto all'osservazione obbiettiva di quanto ci circonda, ed occorre che ciò avvenga per parte di una schiera numerosissima di pionieri della scienza.

Nel ricordare l'opera del compianto nostro Collega Cardani, debbo rilevare come egli appunto avesse doti rispondenti a tale fondamentale principio.

g. c.



d'ordine	Numero della raccolta	COMUNE E LOCALITÀ	Cultura	Giacitura	Origine	Grado
						P <sub>H</sub>
1	562	<i>Valenza</i> (Alessandria) Orano.	Vigneto	in colle	Argille cenozoiche	8.4
2	596	<i>Torrazza Coste</i> (Pavia) Barizonzo	Vigneto	in colle	Argille cenozoiche	8.8
3	1055 suolo	<i>Manerba</i> (Brescia) Paris . . .	Vigneto	in colle	Terreno argilloso di origine glaciale (morena profonda).	9.0
	1056 sottosuolo	» »	»	»		9.0
4	827 suolo	<i>Vezzano</i> (Trento). . . . .	Vigneto	in colle	—	8.2
	828 sottosuolo	»	»	»	—	8.2
5	835 suolo	<i>Vezzano</i> (Trento). . . . .	Vigneto	in colle	—	8.3
	836 sottosuolo	»	»	»	—	8.4
6	576 suolo	<i>Padergnone</i> (Trento) Campagna .	Vigneto	in colle	Alluvionale calcare	8.6
	577 sottosuolo	» »	»	»	»	8.6
7	574 suolo	<i>Santa Lucia di Piave</i> (Treviso) Mandre.	Vivaio	in piano	Alluvionale	8.6
	575 sottosuolo	» »	»	»	»	8.6
8	1019	<i>Pontassieve</i> (Firenze) Fattoria Piè Vecchia.	Vigneto	in colle	Terreno eocenico (alberese)	8.7
9	908 suolo	<i>Corato</i> (Bari) . . . . .	Vigneto	in colle	Calcare ( <i>cárparo</i> )	8.6
	909 sottosuolo	»	»	»	»	8.8
10	959	<i>Marsala</i> (Trapani) Spagnuolo .	Vigneto	—	—	8.6
11	960	<i>Marsala</i> (Trapani) Casa Bianca .	Vigneto	—	—	8.6
12	961	<i>Marsala</i> (Trapani) Kelbi . . .	Vigneto	—	—	8.6
13	962	<i>Pachino</i> (Siracusa) Cozzi . . .	Vigneto	—	—	8.6

di alcalinità Alcalinità specifică (Acqua = 1)	Calcare	Anidride carbon. dei carbonati	RILIEVI SULLA VEGETAZIONE
	Determinaz. calcimetrica	Determinazione ponderale	
	%	%	
25	28.6	13.0	Nel vigneto ricostituito su <i>Rip. × Rup.</i> 3309 si presentano casi di clorosi sporadica.
63	30.3	14	Il vigneto ricostituito su <i>Rip. × Rup.</i> 3309 presenta clorosi primaverile grave.
100	40.4	n. d.	Le viti innestate su <i>Rip. × Rup.</i> 101.14 e su <i>Mourv. × Rup.</i> 1202 sono affette da clorosi mortale. Le viti innestate su <i>Berl. × Rip.</i> 420 A sono invece sane e vigorose.
100	59.0	n. d.	
16	68.8	n. d.	Vigneto di <i>Schiavona</i> innestato su <i>Rip. × Rup.</i> 101.14. Sviluppo deficiente e clorosi.
16	67.5	n. d.	
20	76.6	n. d.	Vigneto di <i>Schiavona</i> , franco di piede, fortemente clorotico.
25	84.5	n. d.	
40	65.9	n. d.	Presentano clorosi intensa le viti innestate su <i>Rip. × Rup. Schwarzmann</i> e su <i>Rip. × Rup.</i> 101.14; presentano clorosi meno intensa le viti innestate su <i>Rip. Portalis</i> e su <i>Mourv. × Rupestris</i> .
40	68.3	n. d.	
40	52.8	23.6	Dei vitigni americani coltivati nel vivaio, nessuno - comprese le <i>Riparie</i> , le <i>Rupestris</i> e i loro ibridi - presentano clorosi.
40	55.9	26.1	
50	57.7	n. d.	Le viti ( <i>Trebbiani</i> ) innestate su <i>Rupestris</i> sono affette da clorosi grave.
40	36.6	n. d.	Il terreno ha azione clorosante mortale sulla vite e sul mandorlo.
63	77.4	n. d.	
40	70.0	n. d.	Terreno clorosante sulle viti.
40	65.4	n. d.	Terreno clorosante sulle viti.
40	40.0	n. d.	Terreno clorosante sulle viti.
40	69.4	n. d.	Terreno clorosante sulle viti.



